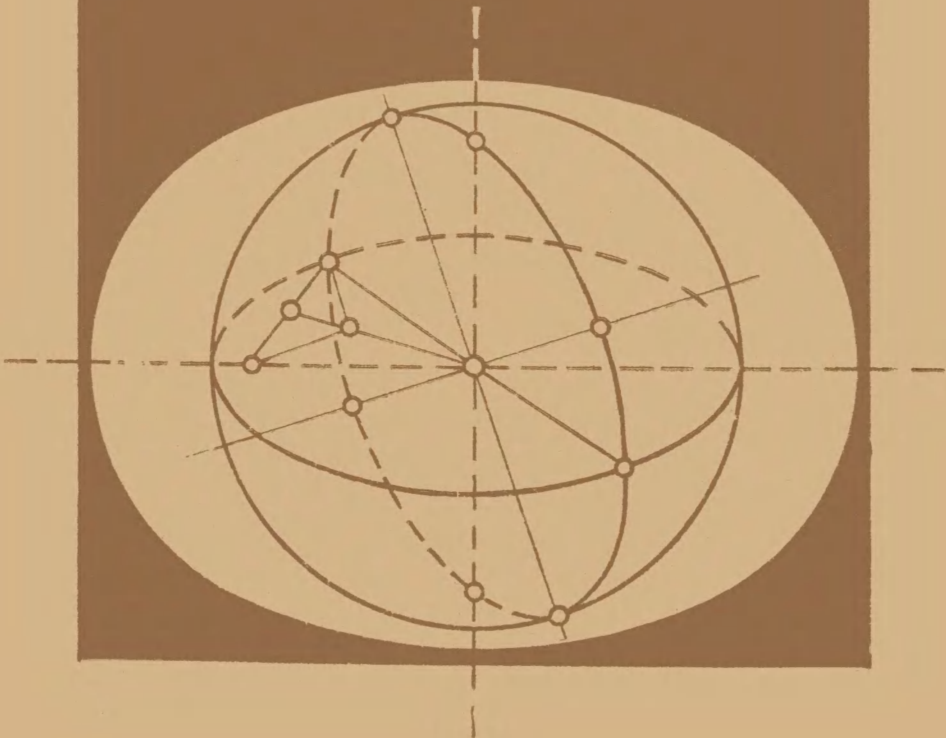
СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ

II



СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ II

Под редакцией
Л. С. АТАНАСЯНА

*Допущено Министерством просвещения СССР
в качестве учебного пособия для студентов
физико-математических факультетов
педагогических институтов*

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1975

513
С23

Атанасян Л. С., Васильева М. В., Вересова Е. Е., Гуревич Г. Б., Ильин А. С., Лактанова Н. В., Редозубова О. С.

Сборник задач по геометрии.
С23 Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов, ч. II. М., «Просвещение», 1975
176 с ил.
На обороте титула авт.: Атанасян Л. С., Васильева М. В., Вересова Е. Е. и др.

$$С\,\frac{60602-732}{103\,(03)-75}\,32-75$$

513

© Издательство «Просвещение», 1975 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий задачник составлен в соответствии с новой программой по геометрии для студентов вторых курсов физико-математических факультетов педагогических институтов по специальности «математика». В нем отражена идея единства всех геометрических дисциплин.

При составлении задачника имелось в виду, что, кроме студентов дневных отделений, им будут пользоваться также студенты заочных и вечерних отделений педагогических институтов и учителя средней школы. В связи с этим задачи, кроме ответов, снабжены также указаниями, а иногда и решениями.

В задачнике учтен опыт преподавания геометрических дисциплин в Московском ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственном педагогическом институте имени В. И. Ленина.

Задачник состоит из трех разделов. Раздел I — «Проективное пространство»; раздел II — «Геометрические построения и методы изображений»; раздел III — «Основания геометрии. Линии и поверхности в евклидовом пространстве. Элементы топологии».

Задачи, помещенные в задачнике, полностью соответствуют содержанию III и IV семестров программы по геометрии и охватывают весь этот материал. Отметим, однако, что ряд задач, помещенных в задачнике, выходит по своему содержанию за пределы обязательного минимума, требуемого программой. По мнению авторов, эти задачи могут служить материалом для спецкурсов, спецсеминаров и работы кружков по геометрии, а также могут быть использованы лицами, желающими углубить свои знания по тому или иному разделу курса. Эти задачи выделены в отдельные пункты и параграфы, отмеченные звездочкой (например, § 4, п. 2*, § 6, п. 4* и др.).

Предлагаемый задачник написан по тому же принципу, что и учебное пособие Л. С. Атанасяна и Г. Б. Гуревича «Геометрия», ч. II выйдет в свет в 1976 г. Эти книги совместно с книгами [5] и [8], дополняя друг друга, представляют единое учебное пособие по полному курсу геометрии для педагогических институтов.

Следует, однако, отметить, что этот задачник составлен с таким расчетом, чтобы им могли бы пользоваться студенты, изучающие геометрию по любому учебному пособию. В связи с этим авторы старались там, где это возможно, пользоваться общепринятой терминологией и символикой. В ряде случаев в начале глав даны краткие пояснения о применяемых терминах. Кроме того, чтобы освободить учащегося от необходимости запоминать многочисленные термины и символы, на с. 169 помещен указатель основных символов и обозначений, применяемых в задачнике.

При составлении задачника авторами была использована учебная литература, список которой помещен на с. 172. Многие задачи, помещенные в главах V, VI, VIII, заимствованы из задачника [7] авторов.

При составлении задач главы XII «Элементы топологии» принимал участие Е. Г. Скляренко.

Авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую благодарность профессорам И. Я. Бакельману и З. А. Скопецу, которые внимательно прочитали рукопись, сделали замечания и дали ценные советы, направленные на улучшение содержания и структуры задачника.

Авторы

Раздел первый

ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

В настоящем разделе помещены задачи, относящиеся к следующим двум вопросам программы курса геометрии: «понятие проективного пространства» и «основные факты проективной геометрии».

Во всех задачах раздела под термином «проективное пространство P_3» («проективная плоскость P_2») следует понимать пространство, построенное на той или иной системе аксиом проективной геометрии (см., например, [6], гл. I, или [22], гл. II, или [26], гл. V и др. [1]).

Задачами данного раздела можно пользоваться также и в том случае, когда понятие проективного пространства введено на основании расширения евклидова или аффинного пространства несобственными элементами (см. например, [52], гл. II или [11], гл. III). Однако важно отметить, что в этом случае все собственные и несобственные элементы считаются совершенно равноправными, и, кроме того, принимаются во внимание только проективные свойства пространства и не учитываются метрические и аффинные свойства и понятия, такие, как «луч», «угол», «полуплоскость», «длина отрезка», «простое отношение трех точек» и т. д. Это замечание существенно также в том случае, когда используются координаты точек прямой на плоскости.

В отличие от предыдущего, под терминами «расширенное аффинное пространство A_3^∞ (плоскость A_2^∞)» или «расширенное евклидово пространство E_3^∞ (плоскость E_2^∞)» мы понимаем аффинное или евклидово пространство, со всеми присущими ему свойствами, дополненное несобственными элементами [2].

В данном разделе имеется целый ряд задач на построение на проективной плоскости. Мы предполагаем, что учащемуся известны основные принципы теории построений в геометрии и что построения выполняются на основе постулатов построения на проективной плоскости (см., например, [6], § 14). Однако задачи на построение, поме-

---

[1] Здесь и в дальнейшем цифры в прямых скобках относятся к списку литературы, помещенному на стр. 172.

[2] Подробнее см. [6], § 6.

щенные в задачнике, можно решать также и в том случае, когда учащиеся не знакомы с постулатами построения на проективной плоскости. В этом случае следует руководствоваться общими принципами, используемыми при решении конструктивных задач в элементарной геометрии, считая, что на проективной плоскости построения выполняются при помощи линейки, т. е. инструмента, позволяющего строить проективные прямые, проходящие через две построенные точки и точки пересечения построенных прямых. Важно отметить, что на проективной плоскости циркуль как инструмент построения отпадает, так как окружность не является проективной фигурой. Указанные выше замечания относятся только к задачам на построение на проективной плоскости. Во всех конструктивных задачах на расширенной аффинной или евклидовой плоскости указаны средства построения.

Глава I

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Принцип двойственности; теорема Дезарга

1. Проективное пространство

1. Какие из перечисленных ниже предложений проективной геометрии справедливы в аффинном (не дополненном несобственными элементами) пространстве:

а) если точка A принадлежит прямой a, а прямая a принадлежит плоскости Π, то точка A принадлежит плоскости Π;

б) существует одна и только одна прямая, принадлежащая двум различным точкам;

в) если две прямые принадлежат одной плоскости, то существует точка, принадлежащая обеим этим прямым;

г) существует одна и только одна прямая, принадлежащая двум различным плоскостям;

д) если две прямые a и b принадлежат одной точке A, то существует плоскость, принадлежащая как прямой a, так и прямой b;

е) если каждая из двух различных точек A и B принадлежит каждой из двух различных плоскостей Π_1 и Π_2, то прямая AB совпадает с прямой $\Pi_1 \cap \Pi_2$?

Какие из перечисленных выше предложений двойственны друг другу по принципу двойственности в пространстве?

2. Найти фигуры, двойственные (по принципу двойственности в пространстве P_3) следующим фигурам: а) трехвершинник; б) две скрещивающиеся прямые (т. е. две прямые, не имеющие общих точек); в) плоскость и прямая, не лежащая в ней; г) полный четырехвершинник (четыре точки общего положения, лежащие в одной плоскости,

и шесть прямых, соединяющих их попарно); д) тетраэдр (четыре точки, не лежащие в одной плоскости, шесть прямых, попарно соединяющих эти точки, и четыре плоскости, определяемые каждой тройкой из данных четырех точек).

3. Доказать теорему: если a и b — скрещивающиеся прямые пространства P_3 и точка A не принадлежит ни одной из этих прямых, то существует одна и только одна прямая, принадлежащая точке A и пересекающая обе прямые a и b.

4. Сформулировать и доказать предложение, двойственное теореме, приведенной в задаче 3, преобразовав по принципу двойственности доказательство исходного предложения.

5. Доказать: а) три различные плоскости всегда имеют по меньшей мере одну общую точку; б) если три прямые попарно пересекаются и не лежат в одной плоскости, то они имеют одну и только одну общую точку.

6. Сформулировать (и тем самым доказать) предложения, двойственные предложениям а) и б) задачи 5.

7. Сформулировать предложения, двойственные (по принципу двойственности в пространстве) прямой и обратной теореме Дезарга[1].

8. В плоскости трехвершинника ABC дана точка S, не лежащая на его сторонах. Пусть $A' = (AS) \cap (BC)$, $B' = (BS) \cap (AC)$, $C' = (CS) \cap (AB)$. Доказать, что точки $(BC) \cap (B'C')$, $(AC) \cap (A'C')$ и $(AB) \cap (A'B')$ коллинеарны.

9. Прямая p лежит в плоскости трехвершинника ABC и не проходит через его вершины. Пусть $A_1 = (BC) \cap p$, $B_1 = (CA) \cap p$, $C_1 = (AB) \cap p$; $R = (BB_1) \cap (CC_1)$, $S = (CC_1) \cap (AA_1)$, $T = (AA_1) \cap (BB_1)$. Доказать, что прямые AR, BS и CT принадлежат одному пучку.

10. Доказать, что если оси перспективы трех попарно перспективных трехвершинников ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ совпадают, то их центры перспективы лежат на одной прямой. Сформулировать предложение, двойственное данному (по принципу двойственности на плоскости).

11. Два тетраэдра (см. задачу 2, д) расположены в пространстве P_3 так, что прямые, соединяющие соответственные вершины, принадлежат одной связке. Доказать, что прямые, по которым пересекаются соответственные грани, лежат в одной плоскости.

Сформулировать двойственное предложение и убедиться в том, что полученное предложение является теоремой, обратной исходной.

12. Два полных четырехвершинника $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ расположены в одной и той же плоскости так, что их соответственные стороны A_1A_2 и B_1B_2, A_1A_3 и B_1B_3 и т. д. не совпадают и пересекаются в шести попарно различных точках: M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34}, где $M_{ij} = (A_iA_j) \cap (B_iB_j)$.

---

[1] Прямая теорема Дезарга формулируется так: если прямые, соединяющие соответственные вершины трехвершинников ABC и $A^1B^1C^1$, сходятся в одной точке, то соответственные стороны этих трехвершинников пересекаются в точках, лежащих на одной прямой.

Доказать, что если пять из указанных выше точек лежат на одной прямой, то а) шестая точка лежит на той же прямой; б) данные четырехвершинники имеют центр перспективы, т. е. прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 и A_4B_4 принадлежат одному пучку.

2. Задачи на построение

13. Дан трехвершинник ABC и три точки P, Q, R в его плоскости, лежащие на одной прямой a. Построить трехвершинник XYZ так, чтобы его вершины X, Y, Z лежали соответственно на сторонах BC, CA, AB трехвершинника ABC, а его стороны YZ, ZX и XY проходили соответственно через точки P, Q и R.

14. Сформулировать задачу, двойственную задаче 13, и дать ее решение с помощью принципа двойственности на плоскости.

3. Расширенные аффинное и евклидово пространства

15. Как расположены две скрещивающиеся прямые, хотя бы одна из которых несобственная?

16. Какие предложения аффинной геометрии содержатся в следующих предложениях проективной геометрии:

а) точка A, принадлежащая обеим плоскостям Π_1 и Π_2, лежит и на прямой $\Pi_1 \cap \Pi_2$;

а*) плоскость Π, проходящая через точки A и B, проходит и через прямую AB;

б) если прямая a и плоскость Π не принадлежат друг другу, то они имеют одну и только одну общую точку;

б*) если прямая a и точка A не принадлежат друг другу, то через них проходит одна и только одна плоскость;

в) через три неколлинеарные точки A, B, C проходит одна и только одна плоскость;

в*) три плоскости Π_1, Π_2, Π_3, не принадлежащие одной прямой, имеют одну и только одну общую точку?

17. Сформулировать в терминах расширенного аффинного пространства следующее предложение аффинной геометрии: если a и b — две скрещивающиеся прямые, то существует одна и только одна плоскость, проходящая через прямую a и параллельная прямой b. Пользуясь свойствами проективного пространства, доказать сформулированное предложение.

18. В трехвершинниках ABC и $A'B'C'$, имеющих центр перспективы, вершины A и A' — несобственные, а стороны BC и $B'C'$ не параллельны. Сформулировать предложение аффинной геометрии, которое соответствует теореме Дезарга для данных трехвершинников.

19. В какую теорему евклидовой геометрии превратится утверждение задачи 9 в том случае, когда прямая p несобственная?

20. Сформулировать в терминах евклидовой геометрии теорему Дезарга и обратную ей теорему в предположении, что для данных трехвершинников:

а) центр перспективы — несобственная точка, а ось перспективы — собственная прямая;

б) центр перспективы — собственная точка, а ось перспективы — несобственная прямая;

в) центр и ось перспективы — несобственные элементы.

§ 2. Координаты точек на прямой. Сложное отношение и гармонические четверки

1. Координаты точек на проективной прямой

21. Преобразование неоднородных проективных координат точек прямой задано формулой:

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad - bc \neq 0, \tag{1}$$

где x — старая координата (координата относительно старой системы координат) точки прямой, а x' — новая координата той же точки. Найти: а) старые координаты координатных точек новой системы координат; б) новые координаты координатных точек старой системы координат.

22. На прямой a, кроме старой системы координат O_1O_2E, дана еще новая система координат ABC, состоящая из точек, имеющих следующие неоднородные координаты в системе O_1O_2E : $A\left(\frac{1}{2}\right)$, $B\,(-2)$, $C\,(-3)$. Найти, как выражается координата x' произвольной точки прямой a относительно новой системы координат через координату x той же точки по отношению к старой системе координат.

23. Написать формулы преобразования однородных координат точек проективной прямой при переходе от системы координат O_1O_2E к системе координат $O_1'O_2'E'$, если даны координаты точек O_1', O_2', E' в системе O_1O_2E:

а) $O_1'\,(0:1)$, $O_2'\,(1:0)$, $E'\,(1:1)$;

б) $O_1'\,(2:1)$, $O_2'\,(1:2)$, $E'\,(1:0)$;

в) $O_1'\,(1:0)$, $O_2'\,(0:1)$, $E'\,(a:b)$,
где $ab \neq 0$.

24. На прямой l в системе координат O_1O_2E даны четыре точки $A\,(a_1:a_2)$, $B\,(b_1:b_2)$, $C\,(c_1:c_2)$, $D\,(d_1:d_2)$. Предполагается, что $A \neq B$, $A \neq C$, $A \neq D$ и $B \neq C$. Вывести следующую формулу:

$$(ABCD) = \begin{vmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_1 b_1 \\ d_2 b_2 \end{vmatrix} : \left(\begin{vmatrix} a_1 d_1 \\ a_2 d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 b_1 \\ c_2 b_2 \end{vmatrix} \right).$$

25. На прямой l в системе O_1O_2E даны точки своими неоднородными координатами:

$$A\,(a),\ B\,(b),\ C\,(c) \text{ и } D\,(d).$$

Вывести следующие соотношения:

а) $(ABCD) = \dfrac{(a-c)(d-b)}{(a-d)(c-b)}$; б) $(O_1ABC) = \dfrac{c-a}{b-a}$.

26. На прямой l в системе координат O_1O_2E даны две различные точки неоднородными координатами: $M_1\ (x_1)$, $M_2\ (x_2)$; ни одна из точек M_1, M_2 не совпадает с точкой O_1. Показать, что точка M, удовлетворяющая соотношению $O_1M \overset{h}{-} M_1M_2$, имеет неоднородную координату $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

27. На прямой l в системе координат O_1O_2E точки M, N имеют неоднородные координаты $M\ (x)$, $N\ (y)$, причем $y \neq x$. Показать, что если $O_1M \overset{h}{-} O_2N$, то $y = 2x$.

28. Пусть A, B, C, D и E — попарно различные точки проективной прямой. Показать, что

$$(ABCD)(ABDE)(ABEC) = 1.$$

Сформулировать предложение, двойственное вышеуказанному (по принципу двойственности на плоскости).

29. На прямой l в системе координат O_1O_2E даны четыре точки своими неоднородными координатами: $A_1\ (x_1)$, $A_2\ (x_2)$, $A_3\ (x_3)$, $A_4\ (x_4)$. Показать, что условие $A_1A_2 \overset{h}{-} A_3A_4$ равносильно соотношению:

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 2(x_1x_2 + x_3x_4).$$

30. На проективной прямой даны три различные точки A, B и C. Показать, что пара точек X и Y гармонически сопряжена с парой A, B тогда и только тогда, когда

$$(ABCX) + (ABCY) = 0.$$

31. Доказать, что на стороне AC полного четырехвершинника $ABCD$ две его вершины A, C гармонически сопряжены с лежащей на AC диагональной точкой M и точкой N, в которой прямая AC пересекает прямую, соединяющую две остальные диагональные точки P и Q.

Сформулировать (и тем самым доказать) предложение, двойственное вышеуказанному по принципу двойственности на плоскости.

32. На плоскости даны две прямые l, m и точка P, не лежащая ни на одной из них. Через точку P проведены две прямые a, b; $A = a \cap l$, $B = a \cap m$, $C = b \cap l$, $D = b \cap m$. Доказать, что точка $(AD) \cap (BC)$ при любом выборе прямых a, b лежит на фиксированной прямой p, проходящей через точку $K = l \cap m$.

33. Для полного четырехвершинника $A_1A_2A_3B$ указаны его диагональные точки: $C_1 = (A_1B) \cap (A_2A_3)$, $C_2 = (A_2B) \cap (A_3A_1)$, $C_3 = (A_3B) \cap (A_1A_2)$. Доказать: 1) точки K_1, K_2, K_3, определяемые соотношениями $K_1C_1 \overset{h}{-} A_2A_3$, $K_2C_2 \overset{h}{-} A_3A_1$, $K_3C_3 \overset{h}{-} A_1A_2$, коллинеарны; 2) прямые A_1B, A_2K_2, A_3K_3 инцидентны одной точке H, причем $HB \overset{h}{-} A_1C_1$.

34. Прямые l_1 и l_2 лежат в плоскости трехвершинника ABC, не проходят через его вершины и не пересекаются на его сторонах. Пусть далее прямые l_1 и l_2 пересекают стороны AB, BC и AC соответственно в точках C_1 и C_2; A_1 и A_2; B_1 и B_2. Доказать, что если $A_1A_2 \mathrel{\ddot{-}} BC$, $B_1B_2 \mathrel{\ddot{-}} CA$, то $C_1C_2 \mathrel{\ddot{-}} AB$[1].

2. Задачи на построение

35. Даны три различные точки A, B и C прямой g. Построить на той же прямой точку X, для которой $(ABCX) = -1$.

36. На прямой l дана проективная система координат O_1O_2E. Построить точки, которые в данной системе координат:

а) имеют неоднородные координаты -2, 2, 4, 3;

б) имеют однородные координаты $(1 : -1)$; $(1 : 2)$.

37. Даны три различные точки A, B, C прямой g. Построить на прямой g точки D, E, F и G так, чтобы $(ABCD) = 2$, $(ABCE) = -2$, $(ABCF) = 3$, $(ABCG) = \frac{2}{3}$.

38. Даны три различные точки A, B и C прямой g. Построить на той же прямой точку X, для которой $(ABCX) = n$, где n — натуральное число, $n > 1$.

3. Прямая в расширенном аффинном и евклидовом пространствах

39. На аффинной плоскости даны три различные прямые a, b и c пучка $[O]$. Пользуясь одной линейкой, построить прямую x того же пучка так, чтобы $ab \overset{h}{-} cx$. Рассмотреть два случая: а) точка O является собственной; б) точка O является несобственной.

40. Доказать следующие предложения:

а) середина отрезка AB и несобственная точка прямой AB гармонически сопряжены с парой точек A, B;

б) если a и b — две пересекающиеся прямые, а c и d — прямые, содержащие биссектрисы смежных углов, образованных прямыми a и b, то $ab \overset{h}{-} cd$.

41. На прямой g даны три различных точки A, B и C. Обосновать следующее построение при помощи циркуля и линейки точки D, удовлетворяющей соотношению $CD \overset{h}{-} AB$: через точки A, B проводим две параллельные прямые a, b, отличные от g; от точки B по обе стороны от нее откладываем на прямой b конгруэнтные отрезки BL, BM и строим точку $K = a \cap (CM)$. Точка $D = (KL) \cap g$ — искомая.

42. Сформулировать утверждения, двойственные предложениям задачи 33. Рассмотреть частный случай: сторона b полного четырехсторонника $a_1a_2a_3b$ — несобственная прямая.

---

[1] Сформулированное предложение по существу является обобщением предложения Паша на проективной плоскости.

§ 3. Проективные отображения; преобразования прямых и пучков

1. Свойства проективных отображений и преобразований

43. Показать, что любое проективное отображение π: $(l) \to (l')$, где $l \neq l'$, отличное от перспективного отображения, можно представить как произведение двух перспективных отображений — σ_1: $(l) \to (l_1)$ и σ_2: $(l_1) \to (l')$.

44. На прямой g даны различные точки A, B, C и на другой прямой g' различные точки A', B' и C'. Доказать, что точки $K = (BC') \cap (B'C)$, $L = (AC') \cap (A'C)$ и $M = (AB') \cap (A'B)$ лежат на одной прямой (теорема Паппа).

45. Сформулировать предложение, двойственное теореме Паппа (см. задачу 44). Показать, что теорема Паппа и сформулированное предложение по существу выражают один и тот же геометрический факт.

46. При проективном отображении π: $g \to g'$ двух различных прямых g и g' различные точки A_1, A_2, ..., A_n прямой g переходят соответственно в точки A_1', A_2', ..., A_n' прямой g'. Доказать, что все точки $M_{ij} = (A_iA_j') \cap (A_i'A_j)$, где $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., n$ и $i \neq j$, лежат на одной прямой h, которая называется *осью отображения* π. Выяснить геометрический смысл точек $h \cap g$ и $h \cap g'$.

47. Сформулировать (и тем самым доказать) предложение, двойственное утверждению задачи 46 (точка H, отвечающая по принципу двойственности прямой h, носит название *центра отображения пучков прямых*).

48. Дан трехвершинник ABC и две точки P и Q на прямой BC. Через точку P проводится переменная прямая, которая пересекает (AB) и (AC) соответственно в точках M и N. Найти множество всех точек пересечений прямых BN и QM.

49. Стороны M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1 трехвершинника с переменными вершинами M_1, M_2, M_3 проходят соответственно через фиксированные коллинеарные точки P_{12}, P_{23}, P_{31}, где $P_{12} \neq P_{23}$, $P_{23} \neq P_{31}$, $P_{31} \neq P_{12}$. Показать, что если переменные вершины M_1 и M_2 принадлежат соответственно двум различным фиксированным прямым a_1 и a_2, не проходящим через точки P_{12}, P_{23}, P_{31}, то переменная вершина M_3 принадлежит некоторой фиксированной прямой l, проходящей через точку $a_1 \cap a_2$.

50. Даны трехвершинник ABC и в его плоскости точки O и O'. Прямые OX и $O'X$, проходящие через переменную точку X стороны BC, пересекают соответственно прямые AB и AC в точках R и S. Найти множество всех точек пересечения прямых OS и $O'R$.

51. Пусть M и N — двойные точки проективного преобразования π: $(g) \to (g)$. Через точку M проведена произвольная прямая l, отличная от g, и на ней взяты две точки O и O', не совпадающие с M. Возьмем переменную точку X прямой g и рассмотрим ее образ $X' = \pi(X)$.

Доказать, что отображение $\bar{\sigma}$: $[O] \to [O']$, при котором (OX) переходит в $(O'X')$, есть перспективное отображение с осью h, проходящей через точку N.

52. Пусть M и N — двойные точки проективного преобразования π: $(g) \to (g)$. Доказать, что для двух пар соответствующих точек A, $A' = \pi(A)$ и B, $B' = \pi(B)$ имеет место соотношение: $(MNAA') = (MNBB')$.

53. На прямой g даны две точки A и B. В преобразовании π прямой g образом для любой ее точки X, отличной от точек A, B, служит точка Y, связанная с X соотношением $XY \overset{h}{=} AB$: кроме того, $\pi(A) = A$, $\pi(B) = B$. Доказать, что преобразование π является проективным.

54. На прямой g даны две точки A и B. Преобразование σ прямой g относит каждой точке X прямой g, отличной от A и от B, точку Y, связанную с X отношением $AX \overset{h}{=} BY$; кроме того, $\sigma(A) = A$, $\sigma(B) = B$. Доказать, что σ есть проективное преобразование.

2. Задачи на построение

55. Проективное отображение π: $(l) \to (l')$ задано тремя парами соответственных точек A, $A' = \pi(A)$; B, $B' = \pi(B)$; C, $C' = \pi(C)$. Для точки M прямой l построить ее образ $M' = \pi(M)$ в предположении, что $l \neq l'$.

56. Проективное отображение π: $(g) \to (g')$ задано тремя парами соответственных точек A, $A' = \pi(A)$; B, $B' = \pi(B)$; C, $C' = \pi(C)$. Построить образ и прообраз точки $g \cap g'$ в предположении, что $g \neq g'$.

57. Проективное отображение $\bar{\tau}$: $[O] \to [O']$ задано тремя парами соответственных прямых: a, $a' = \bar{\tau}(a)$; b, $b' = \bar{\tau}(b)$; c, $c' = \bar{\tau}(c)$. Построить образ $m' = \bar{\tau}(m)$ прямой пучка $[O]$ в предположении, что $O \neq O'$.

58. Проективное отображение $\bar{\tau}$: $[O] \to [O']$ задано тремя парами соответственных прямых: a, $a' = \bar{\tau}(a)$; b, $b' = \bar{\tau}(b)$; c, $c' = \bar{\tau}(c)$. Построить образ и прообраз прямой $m = (OO')$ в предположении, что $O \neq O'$.

59. Проективное преобразование π: $(g) \to (g)$ задано тремя парами соответственных точек: A, $A' = \pi(A)$, B, $B' = \pi(B)$; C, $C' = \pi(C)$. Построить образ X' произвольной точки X прямой g.

60. Проективное преобразование $\bar{\tau}$: $[O] \to [O]$ задано тремя парами соответственных прямых: a, $a' = \bar{\tau}(a)$; b, $b' = \bar{\tau}(b)$; c, $c' = \bar{\tau}(c)$. Построить образ x' произвольной прямой x пучка $[O]$.

61. На прямой g даны две двойные точки M, N проективного преобразования π: $(g) \to (g)$ и пара соответствующих точек A и $A' = \pi(A)$. Построить образ $B' = \pi(B)$ произвольной точки B прямой g.

62. Для параболического проективного преобразования π: $(g) \to (g)$ даны его двойная точка P и пара соответствующих точек A и $A' = \pi(A)$. Построить образ $M' = \pi(M)$ произвольной точки M прямой g.

63. Для гиперболического проективного преобразования $\bar{\tau}$: $[O] \to [O]$ по данным двойным прямым m, n и паре соответствующих прямых a, $a' = \bar{\tau}(a)$ построить образ x' произвольной прямой x из $[O]$.

64. Для проективного преобразования π: $(g) \to (g)$ даны двойная точка M и две пары соответствующих точек A, $A' = \pi(A)$ и B, $B' = \pi(B)$. Построить вторую двойную точку N. Сформулировать и решить двойственную задачу.

§ 4. Инволюции; аналитическое задание проективных преобразований

1. Инволюции

65. Показать, что преобразование π, описанное в задаче 53, является инволюцией.

66. Точки D, E, F лежат соответственно на сторонах BC, AC, AB трехвершинника ABC; прямые AD, BE, CF пересекаются в одной точке O. Преобразование π прямой BC определено как произведение двух перспективных отображений: $\sigma_1 : (BC) \overset{A}{\to} (EF)$, $\sigma_2 : (EF) \overset{O}{\to} (BC)$, $\pi = \sigma_2\sigma_1$. Показать, что преобразование π есть гиперболическая инволюция, и найти ее неподвижные точки.

67. Доказать, что всякое проективное преобразование π: $(l) \to (l)$, не являющееся инволюцией, может быть представлено, по крайней мере одним способом, как произведение двух инволюций.

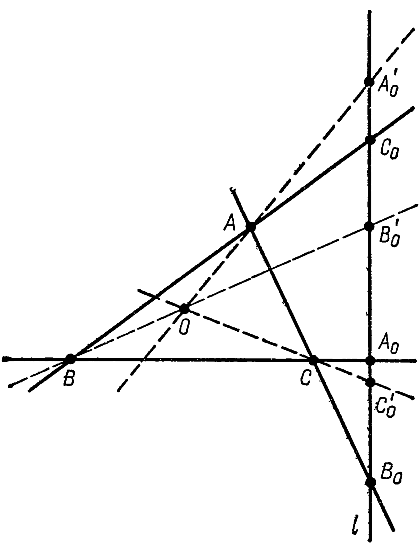


Рис. 1

68. Доказать теорему Паппа — Дезарга[1]: три пары противоположных сторон полного четырехвершинника $PQRS$ пересекаются с любой прямой g, не проходящей через вершины P, Q, R и S, в трех парах точек, соответствующих друг другу в одной и той же инволюции.

69. В плоскости трехвершинника ABC дана прямая l, которая не проходит через его вершины и пересекает стороны BC, CA и AB соответственно в точках A_0, B_0, C_0 (рис. 1). На прямой l даны еще три различные точки A_0', B_0', C_0'. Доказать, что прямые AA_0', BB_0' и CC_0' принадлежат одному пучку тогда и только тогда, когда пары точек

* Эту теорему иногда называют (исторически неточно) второй теоремой Дезарга.

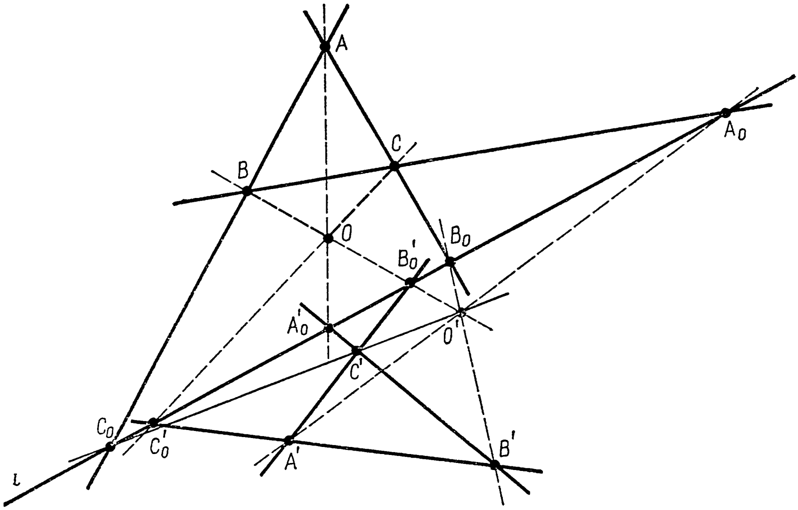


Рис. 2

(A_0, A_0'), (B_0, B_0') и (C_0, C_0') являются сопряженными парами одной и той же инволюции.

70. На плоскости даны два трехвершинника ABC и $A'B'C'$ и прямая l, которая не проходит через точки A, B, C, A', B', C' и пересекает прямые BC, CA, AB, $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ соответственно в точках A_0, B_0, C_0, A_0', B_0', C_0' (рис. 2). Доказать, что если прямые AA_0', BB_0', CC_0' принадлежат пучку $[O]$, то прямые $A'A_0$, $B'B_0$, $C'C_0$ также принадлежат некоторому пучку $[O']$.

71. В плоскости трехвершинника ABC даны две различные точки P и Q, не принадлежащие его сторонам. Пусть $A_0 = (PQ) \cap (BC)$, $B_0 = (PQ) \cap (AC)$, $C_0 = (PQ) \cap (AB)$, а A_0', B_0', C_0' — точки прямой PQ, удовлетворяющие условиям: $PQ \overset{h}{-} A_0A_0'$, $PQ \overset{h}{-} B_0B_0'$, $PQ \overset{h}{-} C_0C_0'$ (рис. 3). Доказать, что прямые AA_0', BB_0', CC_0' принадлежат некоторому пучку $[O]$.

72. В плоскости трехвершинника ABC дана точка O, не лежащая на его сторонах. На сторонах BC, CA и AB взяты соответственно точки A', B' и C'. Доказать, что точки A', B' и C' коллинеарны тогда и только тогда, когда пары прямых (OA), (OA'); (OB), (OB'); (OC), (OC') являются сопряженными парами одной и той же инволюции $\overline{\sigma}$: $[O] \to [O]$.

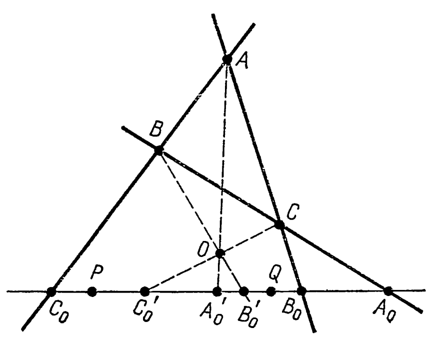


Рис. 3

73. Инволюция τ прямой g задана двумя парами соответствующих друг другу точек: $A, A' = \tau(A)$ и $B, B' = \tau(B)$. Воспользовавшись теоремой Паппа — Дезарга (см. задачу 68), построить для произвольной точки C прямой g ее образ $C' = \tau(C)$.

74. Инволюция π прямой задана двойной точкой K и парой соответствующих точек A и $A' = \pi(A)$. Построить вторую двойную точку L инволюции π.

2*. Проективное преобразование прямой в координатах[1]

В задачах 75—79 и 84—89 настоящего пункта предполагается, что на прямой дана проективная система координат. В задачах 75—79, 84—86 рассматриваются неоднородные координаты точек, а в задачах 87, 88 и 89 однородные.

75. В каждом из следующих случаев записать аналитическое задание проективного преобразования прямой, при котором точки A, B, C переходят соответственно в точки A', B' и C':

а) $A(1)$, $B(2)$, $C(-3)$; $A'(0)$, $B'(-1)$, $C'(3)$,

б) $A(1)$, $B(-3)$, $C(-4)$; $A'(1)$, $B'\left(\frac{1}{5}\right)$, $C'\left(\frac{3}{13}\right)$,

в) $A(0)$, $B(-1)$, $C(5)$; $A'(-3)$, $B'(-5)$, $C'(7)$.

76. Проективное преобразование прямой задано уравнением $x' = -2x + 6$. Найти его неподвижные точки.

77. Найти неподвижные точки проективного преобразования:

$$x' = \frac{4x - 2}{-x + 5}.$$

78. При каком значении коэффициента h проективное преобразование прямой, заданное уравнением $x' = \frac{2x - 3}{3x + h}$, будет параболическим?

79. Найти параболическое проективное преобразование, для которого точка $B(-2)$ является неподвижной и которое переводит точку $K(-5)$ в точку $P(\infty)$.

80. Пусть A, $A' = \sigma(A)$; B, $B' = \sigma(B)$; C, $C' = \sigma(C)$ три различные пары точек инволюции σ прямой g, K — произвольная точка той же прямой. Доказать, что

$$(BCA'K) \cdot (CAB'K) \cdot (ABC'K) = 1.$$

81. Показать, что если точка O_1 системы координат O_1O_2E, заданной на прямой l, является неподвижной точкой проективного преобразования $\pi: (l) \to (l)$, то преобразование π в неоднородных координатах задается уравнением вида $x' = ax + b$, $(a \neq 0)$. Сформулировать и доказать обратное предложение.

82. Написать аналитическое задание проективного преобразования $\pi: (l) \to (l)$ в неоднородных координатах, если координатные точки O_1 и O_2 системы O_1O_2E неподвижны.

[1] Здесь и в дальнейшем в пункты и параграфы, отмеченные звездочкой, включены задачи, выходящие по своему содержанию за пределы обязательного минимума, требуемого программой (см. с. 3).

83. Найти аналитическое задание в неоднородных координатах преобразования, описанного в задаче 66, в системе координат BCD, и определить координаты неподвижных точек.

84. Доказать, что в аналитическом задании проективного преобразования π в неоднородных координатах (см. задачу 21, (I)) координата x' образа M' точки M есть монотонная функция от координаты x точки M (в тех промежутках, где x' не обращается в бесконечность).

Если указанная функция возрастающая, то π называется *проективным преобразованием прямого типа*; если же она убывающая, то — *проективным преобразованием обратного типа*. При каком условии, накладываемом на коэффициенты уравнения (1) задачи 21, преобразование π будет прямого типа и при каком — обратного?

85. Доказать следующие предложения:

а) проективное преобразование обратного типа (см. задачу 84) всегда является гиперболическим;

б) проективное преобразование прямого типа может быть эллиптическим, гиперболическим или параболическим;

в) инволюция прямого типа всегда является эллиптической инволюцией.

86. Доказать, что преобразование прямой, заданное уравнением $xx' = -k^2$, $k \neq 0$, является эллиптической инволюцией; найти все ее пары $A, A' = S(A)$ и $B, B' = S(B)$, для которых имеет место соотношение $AA' \overset{h}{-} BB'$.

87. Составить уравнения проективного преобразования, переводящего точки A_1 $(1:0)$, E $(1:1)$, A_2 $(0:1)$ прямой l соответственно в точки E $(1:1)$, M $(2:5)$, A_1 $(1:0)$ той же прямой.

88. Найти неподвижные точки преобразования прямой:

$$\rho x_1' = x_1 + x_2, \quad \rho x_2' = x_1 - x_2.$$

89. Доказать, что проективное преобразование прямой

$$\rho x_1' = 3x_1 - 5x_2, \quad \rho x_2' = x_1 + x_2$$

не имеет неподвижных точек.

90. Решить аналитически задачу 52.

91. Решить аналитически задачу 54.

92. Решить задачу 53 аналитически и убедиться, что преобразование π есть инволюция.

3. Проективные преобразования прямой расширенного евклидова и аффинного пространств

93. Указать вид преобразования задачи 54 (с точки зрения аффинной геометрии), если A есть несобственная точка прямой g.

94. Указать вид преобразования π задачи 53 (с точки зрения аффинной геометрии), если A есть несобственная точка.

95. Собственная точка O, отвечающая в инволюции несобственной точке прямой, называется *центром инволюции*. Пусть A,

B, C — произвольные точки той же прямой; доказать, что $|OA| \times$ $\times |OA'| = |OB| \cdot |OB'| = |OC| \cdot |OC'|$, где $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$, $C' = \sigma(C)$ (отрезкам OA, OA', ... приписывается знак по обычным правилам).

96. Инволюция σ прямой g, имеющая центр, задана двумя парами соответственных точек: A, $A' = \sigma(A)$ и B, $B' = \sigma(B)$. Обосновать такой способ построения образа $C' = \sigma(C)$ произвольной точки C прямой g при помощи циркуля и линейки: через точки A, A', а затем через точки B, B' проводим две произвольные окружности, пересекающиеся в точках P, Q; окружность, проходящая через точки P, Q и C, пересечет прямую g в искомой точке C'.

97. Воспользоваться результатом задачи 96 для построения при помощи циркуля и линейки двойных точек гиперболической инволюции, имеющей центр.

§ 5. Проективные координаты точек и прямых на плоскости. Формулы преобразования

Во всех задачах этого параграфа предполагается, что все упомянутые геометрические образы расположены в одной плоскости.

1. Проективные координаты точек и прямых

98. Пусть $O_1O_2O_3E$ — произвольная система координат, а $E_1 =$ $= (O_1E) \cap (O_2O_3)$, $E_2 = (O_2E) \cap (O_1O_3)$, $E_3 = (O_3E) \cap (O_1O_2)$, $P_1 =$ $= (E_2E_3) \cap (O_1E)$, $P_2 = (E_3E_1) \cap (O_2E)$, $P_3 = (E_1E_2) \cap (O_3E)$ (рис. 4). Определить координаты точек O_1, O_2, O_3, E, E_1, E_2, E_3, P_1, P_2, P_3.

99. Убедившись, что точки $A\ (1 : -2 : -1)$, $B\ (1 : 0 : -2)$ и $C\ (-3 : -4 : 8)$, заданные в проективной системе координат, лежат на одной прямой, найти координаты точки D, лежащей на той же прямой и удовлетворяющей соотношению $(ABCD) = -\frac{5}{2}$.

100. Даны три точки плоскости $A\ (1 : 2 : 3)$, $B\ (-3 : 2 : 4)$ и $C\ \left(-\frac{2}{7} : \frac{4}{7} : 1\right)$. Доказать, что они лежат на одной прямой, и найти координаты точки D, для которой $AB \overset{h}{-} CD$.

101. На плоскости дана проективная система координат $O_1O_2O_3E$. В каждом из нижеследующих случаев написать уравнение прямой, проходящей через две точки:

а) $A\ (0 : 1 : 1)$, $B\ (1 : 2 : 5)$;
б) $C\ (1 : 1 : 2)$, $D\ (1 : 1 : 3)$;
в) $L\ (1 : -1 : 5)$, $M\ (0 : 2 : 7)$.

102. Пусть $O_1O_2O_3E$ — проективная система координат. Используя обозначения, принятые в задаче 98 (см. рис. 4), написать уравнения:

а) прямых O_1E, O_2E, O_3E;
б) сторон трехвершинника $E_1E_2E_3$;
в) прямых O_2P_1 и P_1P_2.

103. Пусть $O_1O_2O_3E$ — проективная система координат, а $E_1 = (O_1E) \cap (O_2O_3)$, $E_2 = (O_2E) \cap (O_1O_3)$, $E_3 = (O_3E) \cap (O_1O_2)$ (см. рис. 4).

а) Вычислить координаты точек $M_{23} = (E_2E_3) \cap (O_2O_3)$, $M_{13} = (E_1E_3) \cap (O_1O_3)$, $M_{12} = (E_1E_2) \cap (O_1O_2)$;

б) Показать, что точки M_{23}, M_{13}, M_{12} лежат на одной прямой, и написать уравнение этой прямой.

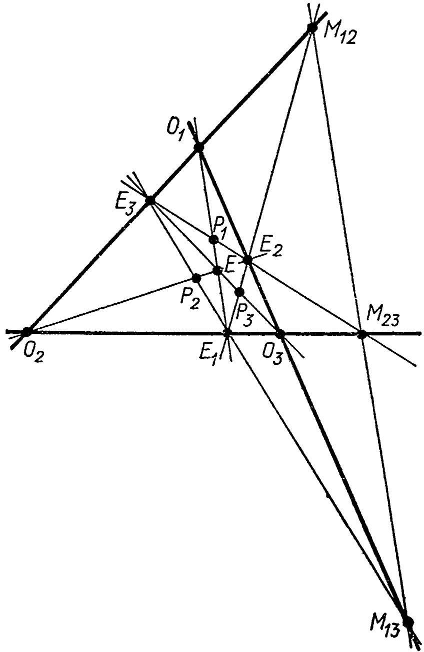


Рис. 4

104. Дан полный четырехвершинник $ABCD$. Проективная система координат $O_1O_2O_3E$ выбрана так, что точки O_1, O_2, O_3 являются диагональными точками четырехвершинника $ABCD$: $O_1 = (AB) \cap (CD)$, $O_2 = (AC) \cap (BD)$, $O_3 = (AD) \cap (BC)$, а точка E совпадает с вершиной A. Вычислить координаты всех вершин и найти уравнения всех сторон четырехвершинника.

105. На сторонах трехвершинника ABC, где $A\ (a_1 : a_2 : a_3)$, $B\ (b_1 : b_2 : b_3)$, $C\ (c_1 : c_2 : c_3)$, даны три точки $K\ (k_1 : k_2 : k_3)$, $L\ (l_1 : l_2 : l_3)$, $M\ (m_1 : m_2 : m_3)$, причем $k_i = \lambda_1 b_i - \lambda_2 c_i$, $l_i = \mu_1 c_i - \mu_2 a_i$, $m_i = \nu_1 a_i - \nu_2 b_i$, $i = 1, 2, 3$. Доказать, что число

$$I = \frac{\lambda_2\mu_2\nu_2}{\lambda_1\mu_1\nu_1},$$

равно сложному отношению $(ABMN)$, где $N = (AB) \cap (KL)$.

106. (См. условие задачи 105.) При каком значении числа I точки K, L, M коллинеарны? При каком значении того же числа прямые AK, BL, CM проходят через одну и ту же точку?

107. (См. условие задачи 101.) Найти координаты прямых AB, CD и LM. Принадлежат ли эти прямые одному пучку?

108. Найти координаты u_1, u_2, u_3 прямой, проходящей через две различные точки $A\ (a_1 : a_2 : a_3)$ и $B\ (b_1 : b_2 : b_3)$.

109. Найти координаты $x_1 : x_2 : x_3$ точки, в которой прямая $(u_1 : u_2 : u_3)$ пересекается с прямой, проходящей через различные точки $A\ (a_1 : a_2 : a_3)$ и $B\ (b_1 : b_2 : b_3)$.

110. На плоскости дана проективная система координат $O_1O_2O_3E$; построить точки $K\ (0 : 1 : -1)$, $L\ (1 : -1 : 0)$, $P\ (1 : 2 : 1)$ и $Q\ (1 : -1 : 1)$.

111. На плоскости дана проективная система координат. Построить прямые $l_1\ (1 : 0 : 0)$, $l_2\ (1 : 1 : 1)$, $l_3\ (1 : 0 : -1)$ и $l_4\ (1 : 1 : -3)$.

2. Формулы преобразования

112. В каждом из нижеследующих случаев написать формулы преобразования координат при переходе от системы координат $O_1O_2O_3E$ к системе $O_1'O_2'O_3'E'$:

а) $O_1' = O_2,\ O_2' = O_3,\ O_3' = O_1,\ E' = E$;

б) $O_1' = O_2,\ O_2' = O_1,\ O_3' = O_3,\ E' = E$;

в) $O_1' = O_1,\ O_2' = O_2,\ O_3' = E,\ E' = O_3$.

113. Записать формулы преобразования координат при переходе от системы $O_1O_2O_3E$ к системе $O_1O_2O_3E'$, если E' в исходной системе имеет координаты $(-1:2:3)$.

114. Написать формулы преобразования координат, если точки O_1', O_2', O_3', E' новой системы координат имеют по отношению к старой системе координат следующие координаты — $O_1'\ (1:1:0)$, $O_2'\ (0:-1:2)$, $O_3'\ (1:1:1)$, $E'\ (2:3:-5)$.

115. На плоскости даны две системы координат — старая $O_1O_2O_3E$ и новая $O_1'O_2'O_3'E'$. Точки O_1', O_2', O_3' и E' в старой системе имеют координаты: $O_1'\ (1:-1:1)$, $O_2'\ (1:0:1)$, $O_3'\ (2:1:-3)$, $E'\ (5:-4:0)$. Найти новые координаты точки $M\ (1:1:1)$.

116. Преобразование координат точек задано формулами: $\rho x_i = a_{i1}x_1' + a_{i2}x_2' + a_{i3}x_1'$, $i = 1, 2, 3$, причем определитель преобразования $\Delta = |a_{ij}| \neq 0$. Найти уравнения, связывающие новые и старые координаты произвольной прямой.

117. Дан трехвершинник $A_1A_2A_3$ и прямая l, не проходящая через его вершины. Показать, что точку E всегда можно выбрать так, чтобы прямая l в системе $A_1A_2A_3E$ имела уравнение: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

3. Решение геометрических задач методом координат

118. Точки L_1, L_2, L_3 лежат соответственно на сторонах A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 трехвершинника $A_1A_2A_3$ и отличны от его вершин; l — прямая, расположенная в его плоскости, $K_1 = l \cap A_2A_3$, $K_2 = l \cap A_1A_3$, $K_3 = l \cap A_1A_2$. Доказать, что точки L_1, L_2, L_3 коллинеарны тогда и только тогда, когда $(A_2A_3K_1L_1) \cdot (A_3A_1K_2L_2) \times (A_1A_2K_3L_3) = 1$.

119. Пусть $O_1O_2O_3$ — трехвершинник, E — точка, не лежащая на его сторонах, и $E_1 = (O_1E) \cap (O_2O_3)$, $E_2 = (O_2E) \cap (O_1O_3)$, $E_3 = (O_3E) \cap (O_1O_2)$. Пусть, далее, точки A_1, A_2, A_3 расположены на прямых O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 и не совпадают с вершинами трехвершинника $O_1O_2O_3$. Показать, что прямые O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3 принадлежат одному пучку тогда и только тогда, когда

$$(O_2\ O_3\ E_1\ A_1)\ (O_3\ O_1\ E_2\ A_2)\ (O_1\ O_2\ E_3\ A_3) = 1$$

120. (Теорема о дважды перспективных трехвершинниках.) Трехвершинники ABC и $A_1B_1C_1$ расположены в плоскости так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O_1, а прямые AB_1, BC_1 и CA_1 — в точке O_2. Доказать, что прямые AC_1, BA_1, CB_1 также пересекаются в точке O_3.

121. Пусть стороны шестивершинника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ удовлетворяют следующим двум условиям:

а) (A_1A_2), (A_3A_4), (A_5A_6) принадлежат одному пучку;

б) (A_2A_3), (A_4A_5), (A_6A_1) также принадлежат одному пучку.

Доказать, что диагонали A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6 шестивершинника пересекаются в одной точке.

122. Две различные прямые p и q, не проходящие через вершины трехвершинника $A_1A_2A_3$, пересекают его стороны A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 соответственно в точках P_1, P_2, P_3 и Q_1, Q_2 и Q_3. Показать, что точки $M_{12} = (P_1Q_2) \cap (Q_1P_2)$, $M_{13} = (P_1Q_3) \cap (Q_1P_3)$ и $M_{23} = (P_2Q_3) \cap \cap (Q_2P_3)$ коллинеарны.

123. Пусть ABC — произвольный трехвершинник, а P — точка на стороне BC, отличная от B и C. Через P проведена переменная прямая l, которая пересекает стороны AC и AB соответственно в точках M и N. Показать, что прямая LM, где $L = AP \cap NC$, при любом положении прямой l проходит через фиксированную точку Q плоскости.

124. Пусть $O_1O_2O_3$ — трехвершинник, E — точка, не лежащая на его сторонах, $E_1 = (O_1E) \cap (O_2O_3)$, $E_2 = (O_2E) \cap (O_1O_3)$, $E_3 = (O_3E) \cap (O_1O_2)$. На прямой O_1E_1 взята произвольная точка B и рассмотрены точки $C = (BE_2) \cap (O_3E)$ и $D = (BE_3) \cap (O_2E)$. Показать, что прямые O_2O_3, E_2E_3 и CD принадлежат одному пучку.

§ 6. Проективные преобразования плоскости

Проективным преобразованием или *коллинеацией* $\pi : P_2 \to P_2$ называется всякое взаимно однозначное отображение точек проективной плоскости P_2 на P_2, при котором коллинеарные точки переходят в коллинеарные точки. При этом легко показать, что множество всех точек прямой переходит во множество всех точек той же или другой прямой, поэтому проективное преобразование точек плоскости P_2 индуцирует преобразование прямых плоскости P_2, которое пучок прямых переводит в пучок. Для проективных преобразований основным является свойство инвариантности сложного отношения четырех коллинеарных точек прямой (четырех прямых, принадлежащих одному пучку).

Точка M называется *неподвижной точкой* преобразования $\pi : P_2 \to P_2$, если ее образ совпадает с ней. Прямая a называется *инвариантной*, если ее образ совпадает с ней, но не все точки этой прямой являются неподвижными. Прямую, целиком состоящую из неподвижных точек, будем называть *неподвижной прямой*. Нетождественное проективное преобразование $\pi : P_2 \to P_2$, имеющее неподвижную прямую l, называется *гомологией*, а прямая l — *осью гомологии*.

1. Проективные преобразования в координатах

125. На плоскости дана система координат $O_1O_2O_3E$. Найти уравнения коллинеации π, для которой

$$O_2 = \pi(O_1),\ O_1 = \pi(O_2),\ E = \pi(O_3),\ O_3 = \pi(E).$$

126. Найти уравнения коллинеации, преобразующей точки $(2:1:0)$, $(0:1:1)$, $(1:-1:1)$ и $(1:3:0)$ соответственно в точки O_1, O_2, O_3 и E (в системе координат $O_1O_2O_3E$).

127. Найти проективное преобразование плоскости, переводящее точки $(0:0:1)$, $(1:2:0)$, $(1:0:1)$, $(0:1:0)$ в точки $(1:2:0)$, $(1:0:1)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$ соответственно.

128. В системе координат $O_1O_2O_3E$ даны прямые l_1 и l_2 уравнениями $x_1+x_2+x_3=0$, $5x_1+2x_3=0$ и точки $A(0:1:1)$, $B(2:-1:2)$, $C(1:3:0)$, $A'(0:4:3)$, $B'(-1:1:7)$, $C'(4:1:-4)$. Найти коллинеацию, которая преобразует l_1, A, B, C в l_2, A', B', C' соответственно.

129. На плоскости даны две пятерки точек общего положения: A, B, C, E, M и A', B', C', E', M'. При каком условии существует коллинеация π, для которой $A'=\pi(A)$, $B'=\pi(B)$, $C'=\pi(C)$, $E'=\pi(E)$, $M'=\pi(M)$?

130. Найти неподвижные точки и инвариантные прямые коллинеации

$$\rho x_1' = 4x_1 - x_2,\quad \rho x_2' = 6x_1 - 3x_2,$$
$$\rho x_3' = x_1 - x_2 - x_3.$$

131. Пусть $O_1O_2O_3E$ — данная проективная система координат. Записать аналитическое задание проективного преобразования π: $P_2 \to P_2$, при котором $\pi(O_1)=O_2$, $\pi(O_2)=O_3$, $\pi(O_3)=E$, $\pi(E)=O_1$. Найти координаты неподвижных точек этого преобразования.

132. Коллинеация π плоскости имеет две различные неподвижные точки A, B. Каковы уравнения этой коллинеации относительно проективной системы координат $O_1O_2O_3E$, если $O_1=A$, $O_2=B$? Доказать, что множество всех коллинеаций плоскости, при которых точки A и B неподвижны, есть группа[1].

133. Различные прямые a и b инвариантны относительно коллинеации π плоскости. В предположении, что прямые a и b приняты за координатные прямые $x_1=0$ и $x_2=0$, написать уравнения коллинеации π. Доказать, что множество всех коллинеаций плоскости, при которых прямые a и b инвариантны, есть группа.

2. Гомологии; геометрические приложения

134. Доказать, что любая коллинеация $\pi: P_2 \to P_2$ имеет по меньшей мере одну неподвижную точку и по меньшей мере одну инвариантную прямую.

---

[1] Бинарная операция, определенная на множестве коллинеаций,— произведение (композиция) коллинеаций.

135. Дать конструктивное доказательство предложения: если нетождественная коллинеация π плоскости обладает неподвижной прямой g (π — гомология), то существует неподвижная точка C (центр гомологии), такая, что всякая прямая, содержащая точку C, инвариантная прямая преобразования π.

136. Доказать следующее предложение: если при нетождественном проективном преобразовании π точка O является неподвижной и существуют по крайней мере три различные инвариантные прямые, проходящие через эту точку, то преобразование π является гомологией с центром в точке O.

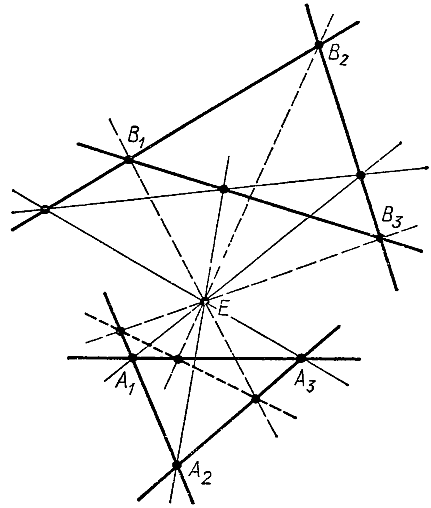


Рис. 5

137. На плоскости P_2 даны произвольная прямая g и три различные коллинеарные точки O, A, A', где $A \notin g$ и $A' \notin g$. Показать, что существует одна и только одна гомология $\pi : P_2 \to P_2$ с осью g, центром O, при которой точка A переходит в точку A'.

138. Преобразование π плоскости есть гиперболическая гомология с центром O и осью g. Показать, что сложное отношение $(OKMM')$, где $M' = \pi(M)$, $K = (OM) \cap g$, одинаково для всех точек M плоскости, отличных от центра O и не лежащих на оси g; его называют инвариантом гомологии π.

139. На плоскости P_2 даны два трехвершинника $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ и точка E, не лежащая на их сторонах (рис. 5). Доказать: если точки $(A_1E) \cap (B_2B_3)$, $(A_2E) \cap (B_3B_1)$, $(A_3E) \cap (B_1B_2)$ коллинеарны, то точки $(B_1E) \cap (A_2A_3)$, $(B_2E) \cap (A_3A_1)$ и $(B_3E) \cap (A_1A_2)$ также коллинеарны.

140. В плоскости трехвершинника $A_1A_2A_3$ дана точка E, не лежащая ни на одной из его сторон. Пусть $E_1 = (A_1E) \cap (A_2A_3)$, $E_2 = (A_2E) \cap (A_1A_3)$, $E_3 = (A_3E) \cap (A_1A_2)$. Точки M_1, M_2, M_3 лежат соответственно на сторонах E_2E_3, E_1E_3, E_1E_2 трехвершинника $E_1E_2E_3$ (рис. 6). Доказать следующее предложение: если прямые E_1M_1, E_2M_2, E_3M_3 принадлежат пучку $[P]$, то прямые A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 принадлежат некоторому пучку $[Q]$.

141. Доказать следующее предложение: если в условиях задачи 140 точки M_1, M_2, M_3 коллинеарны, то коллинеарны точки $N_1 = (A_1M_1) \cap (A_2A_3)$, $N_2 = (A_2M_2) \cap (A_1A_3)$, $N_3 = (A_3M_3) \cap \cap (A_1A_2)$.

142. Гиперболическая гомология π плоскости называется инволюционной, если $\pi^{-1} = \pi$. Пусть O и g — центр и ось инволюционной гомологии. Доказать, что $MM' \stackrel{h}{-} OK$, где M — любая

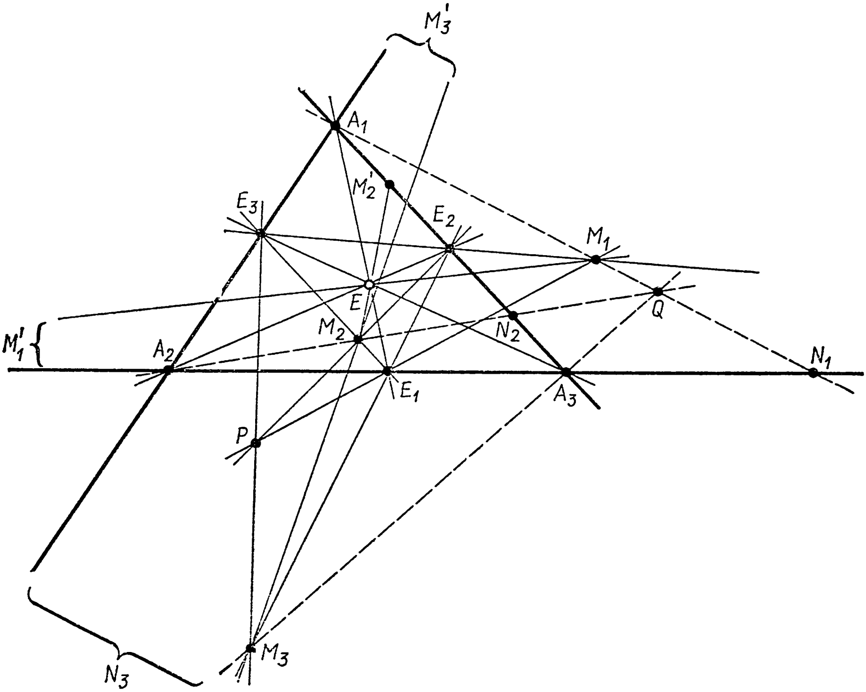


Рис. 6

точка плоскости, отличная от O и не лежащая на оси g ($M' = \pi(M)$, $K = (OM) \cap g$).

143. π — коллинеация плоскости; $A' = \pi(A)$, $A = \pi(A')$, $B' = \pi(B)$, $B = \pi(B')$. Точки A, A', B, B', а также прямые AB и $A'B'$ различны. Доказать:

а) π — инволюционная гомология (см. задачу 142);

б) всякая коллинеация τ плоскости, не совпадающая с тождественным преобразованием и удовлетворяющая условию $\tau^{-1} = \tau$, есть (инволюционная) гомология.

3. Задачи на построение

144. Четверки точек A_1, A_2, A_3, E и A_1, A_2, A_3, E' — общего положения. A_1, A_2 и A_3 — неподвижные точки коллинеации σ; $E' = \sigma(E)$. Построить точку $M' = \sigma(M)$ и прямую $a' = \sigma(a)$ (a и M выбраны произвольно).

145. Проективное преобразование π задано четырьмя парами соответственных точек A, A'; B, B'; C, C' и D, D' (каждая группа точек A, B, C, D и A', B', C', D' является четверкой точек общего положения). Построить образ M' произвольной точки M плоскости.

146. Проективное преобразование π задано тремя парами соответственных точек A, A'; B, B'; C, C' и парой соответственных прямых

a, a'. Предполагается, что каждая группа точек A, B, C, и A', B', C' неколлинеарна и, кроме того, $A \notin a$, $B \notin a$, $C \notin a$; $A' \notin a'$, $B' \notin a'$, $C' \notin a'$. Построить образы данной прямой m и данной точки M.

147. Гомология π плоскости P_2 задана центром O, осью g и парой различных соответственных точек A и A'. Построить образ M' произвольной точки M плоскости. Рассмотреть два случая: а) $O \notin g$; б) $O \in g$.

148. (См. задачу 147.) Построить точки $A'' = \pi(A') = \pi^2(A)$, $B = \pi^{-1}(A)$ и образ прямой a, не проходящей через центр O гомологии π.

149. (См. задачу 147.) На двух данных прямых a и b построить точки, соответствующие друг другу в гомологии π.

150. Даны центр O гомологии π и прямые $a' = \pi(a)$ и $a'' = \pi^{-1}(a)$ (прямые a, a' и a'' должны принадлежать одному пучку $[P]$). Построить ось g гомологии π.

151. Построены три неколлинеарные точки A, B, C и их образы A', B', C' при гомологии π. Выяснить ограничения, накладываемые на точки A, B, C, A', B', C'; построить ось и центр гомологии π.

4*. Свойства гомологии (продолжение) [1]

152. Показать, что любую гомологию $\pi : \omega \to \omega$, где ω — плоскость пространства P_3, можно представить как произведение двух перспективных отображений плоскостей пространства P_3.

153. В системе координат $O_1O_2O_3E$ записать аналитическое задание параболической гомологии π, осью которой является прямая O_2O_3, если известно, что π преобразует точку $M(3 : -1 : 2)$ в точку $M'(1 : -1 : 0)$.

154. Преобразование π плоскости в системе координат $O_1O_2O_3E$ задано уравнениями:

$$\rho x_1' = x_2 + x_3, \quad \rho x_2' = x_1 + x_3,$$
$$\rho x_3' = x_1 + x_2.$$

Показать, что π есть гиперболическая гомология; найти ее ось g и центр O.

155. Коллинеация π плоскости задана в системе координат $O_1O_2O_3E$ уравнениями:

$$\rho x_1' = x_2 - x_3, \quad \rho x_2' = x_1 + x_3,$$
$$\rho x_3' = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3.$$

Показать, что π есть параболическая гомология, и найти ее центр O и ось g.

156. Найти общий вид аналитического задания гомологии, осью которой является прямая с координатами $(1 : 1 : 1)$. Выразить координаты центра гомологии через коэффициенты аналитического задания.

---

[1] См. подстрочное примечание на с. 16.

157. Показать, что проективное преобразование, заданное следующими уравнениями, является гиперболической гомологией:

$$\rho x_1' = ax_1 + cx_3,$$
$$\rho x_2' = ax_2 + dx_3,$$
$$\rho x_3' = bx_3,$$

где $ab \neq 0$ и $a \neq b$. Вычислить инвариант этой гомологии (см. задачу 138).

158. Дана проективная система координат $O_1O_2O_3E$. Центр гиперболической гомологии плоскости — точка O_3, а ее ось — прямая $g_3 = (O_1O_2)$. Найти уравнения гомологии. Доказать, что множество, состоящее из всех таких гомологий и тождественного преобразования плоскости, есть коммутативная группа.

159. Дана проективная система координат $O_1O_2O_3E$. Центр параболической гомологии — точка O_1, ось — прямая $g_3 = (O_1O_2)$. Найти уравнения гомологии. Доказать, что множество, состоящее из тождественного преобразования плоскости и всех параболических гомологий, обладающих указанными свойствами, есть коммутативная группа.

160. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы две гомологии σ и τ коммутировали (т. е. удовлетворяли условию $\sigma\tau = \tau\sigma$).

161. При каком условии произведение $\tau\sigma$ двух гомологий σ и τ также является гомологией?

162. Показать, что коллинеация π (см. задачу 125) является инволюционной гомологией (см. задачу 142). Найти центр O и ось g этой гомологии.

163. Доказать:

а) произведение двух инволюционных гомологий (см. задачу 142) σ и τ с общей осью есть параболическая гомология или тождественное преобразование;

б) всякая параболическая гомология может быть представлена как произведение двух инволюционных гомологий, имеющих общую ось.

Глава II

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

В настоящей главе представлены задачи на теорию линий второго порядка на проективной плоскости P_2. При этом мы исходим из следующего определения: *линией второго порядка называется множество Γ всех точек плоскости, координаты которых в выбранной системе координат $O_1O_2O_3E$ удовлетворяют уравнению:*

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0, \qquad (1)$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ для всех i, $j = 1, 2, 3$ и не все коэффициенты a_{ij} равны нулю.

Ранг матрицы $\| a_{ij} \|$, образованной из коэффициентов при x_1, x_2, x_3 уравнения (1), не зависит от выбора системы координат и называется рангом линии второго порядка. При $r = 3$ линия называется невырожденной, а при $r = 1$ или $r = 2$ — вырожденной. Существуют только два различных вида невырожденных линий второго порядка, простейшие уравнения которых имеют вид:

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ — овальная линия второго порядка;

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ — нулевая линия второго порядка.

Существуют следующие три вида вырожденных линий второго порядка

$x_1^2 - x_2^2 = 0$ — пара различных действительных прямых;

$x_1^2 + x_2^2 = 0$ — пара комплексно-сопряженных прямых;

$x_1^2 = 0$ — пара совпавших прямых.

Имеет место следующая важная теорема Штейнера: *если дано проективное отображение двух различных пучков $\overline{\pi}$: $[O_1] \to [O_2]$, то множество всех точек пересечения соответственных прямых данных пучков есть овальная линия второго порядка, если $\overline{\pi}$ не является перспективным отображением, и пара прямых, если $\overline{\pi}$ — перспективное отображение.*

Фигура, двойственная линии второго порядка, называется пучком второго порядка. Все утверждения, сформулированные выше, по принципу двойственности на плоскости могут быть перенесены на пучки второго порядка.

Интересно заметить, что если определение линии второго порядка, данное выше, несколько изменить, потребовав, чтобы в дополнение к сформулированному выше условию множество Γ содержало хотя бы три неколлинеарные точки, то в силу теоремы Штейнера и приведенной выше классификации линий второго порядка мы приходим к следующему геометрическому определению, которое иногда встречается в учебной литературе по проективной геометрии: *линией второго порядка называется множество всех точек пересечения соответственных прямых двух различных проективных пучков прямых.*

В заключение введем следующее соглашение. Во всех задачах данной главы, где условиями задачи не предполагается задание системы координат, будем считать, что каждая линия второго порядка содержит хотя бы три различные неколлинеарные точки. Таким образом, при решении этих задач можно использовать как исходное аналитическое, так и второе, геометрическое определение.

§ 7. Линии второго порядка

Во всех задачах настоящего параграфа, в которых даны точки своими координатами или линии — уравнениями, предполагается, что на плоскости задана некоторая проективная система координат.

1. Определение линии второго порядка; уравнение линии

164. На плоскости дана система координат $O_1O_2O_3E$. В этой системе записать общий вид уравнения линии второго порядка, проходящей через все четыре координатные точки.

165. На плоскости дана система координат $O_1O_2O_3E$. Записать общий вид уравнения линии второго порядка, которая проходит через точки O_2 и O_3 и в этих точках имеет касательные прямые O_1O_2 и O_1O_3.

166. Определить, к какому типу принадлежит каждая из следующих линий второго порядка:

а) $4x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-12x_1x_3-6x_2x_3=0$;

б) $2x_1^2+x_2^2-x_3^2+3x_1x_2-x_1x_3+2x_2x_3=0$;

в) $x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3=0$;

г) $5x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3=0$.

167. Показать, что каждая из следующих линий второго порядка распадается на пару прямых. Написать уравнения этих прямых:

а) $2x_1^2-x_2^2+2x_3^2+x_1x_2+5x_1x_3-x_2x_3=0$;

б) $4x_1^2+9x_2^2-10x_3^2+12x_1x_2-6x_1x_3-9x_2x_3=0$;

в) $2x_1^2-5x_3^2+2x_1x_2+3x_1x_3-2x_2x_3=0$.

168. Дана линия второго порядка:

$$x_1^2+\lambda x_2^2+(\lambda+1)x_3^2+2\lambda x_1x_2+2\lambda x_1x_3+2x_2x_3=0.$$

При каких значениях λ данная линия является вырожденной?

169. Дана линия второго порядка: $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$. Найти точки ее пересечения с прямыми: а) O_2O_3; б) O_1O_3; в) O_1O_2; г) O_1E; д) O_2E; е) O_3E.

170. Найти точки пересечения линии второго порядка

$$2x_1^2+x_2^2-x_3^2+3x_1x_2-x_1x_3+2x_2x_3=0$$

с прямыми:

а) $x_1-2x_2+x_3=0$;

б) $x_1=5\lambda-\mu,\ x_2=-3\mu,\ x_3=-2\lambda+\mu$.

171. На плоскости даны две прямые a и b и три неколлинеарные точки P, Q, R, не лежащие на прямых a и b и расположенные так, что точки Q, R, $a\cap b$ неколлинеарны. Две вершины X и Y трехвершинника XYZ с переменными вершинами лежат на прямых a и b соответственно, а его стороны XY, XZ и YZ проходят соответственно через точки P, Q, R. Найти множество всех вершин Z трехвершинника XYZ.

172. На овальной линии второго порядка G даны четыре различные точки A, B, C и D и переменная точка S. Показать, что число $\alpha = (SA, SB, SC, SD)$ не зависит от точки S. Если точка S совпадает с одной из данных точек (например, с точкой A), то под прямой SA следует понимать касательную к линии G в точке A. α — *сложное отношение точек* A, B, C, D *линии* G.

173. Даны четыре точки A, B, C, D общего положения. Найти множество Ω всех точек M, для которых $(MA, MB, MC, MD) = \alpha$, где α — данное действительное число, отличное от 0 и 1.

174. Пусть различные точки A, B, C и D принадлежат овальной линии G второго порядка. Через точку A' проведена произвольная прямая l, пересекающая линию G в точках A и A', а прямые CD, BD и CB соответственно в точках B', C' и D'. Показать: $\alpha = (A'B'C'D')$ не зависит от положения прямой l.

175. Дан полный четырехвершинник $ABCD$ и прямая a, не проходящая ни через одну из его вершин; согласно теореме Паппа — Дезарга (см. задачу 68), на прямой a определится инволюция σ, в которой соответствуют друг другу точки пересечения прямой a с каждой из пар противоположных сторон полного четырехвершинника $ABCD$. Доказать, что линия второго порядка G, содержащая точки A, B, C, будет проходить через точку D тогда и только тогда, когда ее точки пересечения P, P' с прямой a отвечают друг другу в инволюции σ.

176. Дана овальная линия второго порядка G, две ее внутренние точки A, A' и две точки U, U', принадлежащие G. Доказать, что существуют две и только две такие коллинеации π_1 и π_2, что $\pi_i(G) = G$, $\pi_i(A) = A'$, $\pi_i(U) = U'$, $i = 1, 2$.

177. Найти уравнения коллинеаций, оставляющих инвариантной линию

$$x_1x_2 - x_3^2 = 0.$$

2. Теоремы Паскаля и Брианшона; задачи на построение

178. Даны пять точек общего положения A, B, C, D, E и прямая a, проходящая через точку A и не проходящая через остальные точки. Пусть G — линия второго порядка, определяемая точками A, B, C, D, E, а X — точка пересечения прямой a и линии G, отличная от A.

а) Пользуясь геометрическим определением линии второго порядка, построить точку X.

б) Пользуясь теоремой Паскаля, построить точку X.

179. Даны пять точек общего положения A, B, C, D и E. Пусть G — линия второго порядка, определяемая этими точками, а x — касательная к G в точке A.

а) Пользуясь геометрическим определением линии второго порядка, построить прямую x.

б) Пользуясь предельным случаем теоремы Паскаля, построить прямую x.

180. Даны четыре точки общего положения A, B, C, D и прямая a, проходящая через точку A и не проходящая через остальные точки.

а) Показать, что существует одна и только одна линия второго порядка G, проходящая через данные точки и имеющая прямую a своей касательной.

б) Построить произвольную точку X линии G и касательную к линии G в этой точке.

181. Даны три точки общего положения A, B, C и две прямые a и b, проходящие соответственно через A и B и не содержащие C.

а) Показать, что существует одна и только одна линия второго порядка G, проходящая через данные точки и имеющая прямые a и b своими касательными.

б) Построить произвольную точку линии G и касательную к ней в этой точке.

182. Даны пять прямых общего положения [1]. Считая, что данные прямые являются касательными к линии второго порядка G, построить:

а) еще одну касательную линии G;

б) точку касания одной из данных прямых.

183. Даны четыре касательных овальной линии второго порядка и точка касания одной из них. Построить еще одну касательную.

184. Даны три касательных овальной линии второго порядка и точки касания двух из них. Построить точку касания третьей касательной.

185. Даны три касательных овальной линии второго порядка и точки касания двух из них. Построить еще одну точку линии.

186. Трехвершинники ABC и $A'B'C'$ расположены так, что прямые AA', BB' и CC' принадлежат одному пучку. Доказать, что шесть точек, в которых стороны трехвершинника ABC пересекают несоответственные им стороны трехвершинника $A'B'C'$, лежат на одной линии второго порядка. Сформулировать двойственное предложение.

187. Стороны BC, AC, AB трехвершинника ABC касаются данной линии второго порядка соответственно в точках K, L, M. Доказать, что трехвершинники ABC и KLM перспективны (т. е. прямые AK, BL, CM принадлежат одному пучку).

188. Если два трехвершинника ABC и KLM вписаны в данную линию второго порядка, то они описаны около некоторой другой линии второго порядка. Доказать.

§ 8. Полюсы и поляры

Две точки M и N называются *сопряженными относительно линии G второго порядка*, если точки пересечения (действительные или комплексные) прямой MN с линией G гармонически сопряжены с точками M и N. Если на плоскости дана система координат и линия G определяется уравнением (1) (с. 26), а данные точки имеют соответственно координаты $(m_1 : m_2 : m_3)$ и

---

[1] Т. е. никакие три из данных пяти прямых не принадлежат одному пучку.

$(n_1 : n_2 : n_3)$, то условие сопряженности записывается так:

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} m_i n_j = 0. \qquad (1)$$

Пусть M — некоторая точка плоскости, в которой лежит линия G. *Множество всех точек плоскости, каждая из которых сопряжена с точкой M, является прямой, называемой полярой точки M;* если m — поляра точки M, то M называется полюсом прямой m.

Имеет место следующее важное свойство взаимности полюсов и поляр: *если поляра p точки P проходит через точку Q, то поляра q точки Q проходит через точку P.* Опираясь на это свойство, вводится следующее свойство сопряженности двух прямых: *прямые a и b называются сопряженными относительно линии второго порядка, если каждая из них проходит через полюс другой прямой.*

1. Определение полюсов и поляр

189. Дана линия второго порядка G:

$$2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_2x_3 = 0.$$

а) Написать уравнение поляр относительно G следующих точек: $O_1\ (1:0:0)$, $O_2\ (0:1:0)$, $O_3\ (0:0:1)$, $E\ (1:1:1)$, $M\ (2:-1:5)$.

б) Найти координаты полюса прямой $7x_1 + 4x_2 - 10x_3 = 0$ относительно линии G.

190. Найти уравнения касательных, проведенных из точки $A\ (3:-2:2)$ к линии, заданной уравнением:

$$3x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0.$$

191. Доказать, что при любой коллинеации:

а) линия второго порядка переходит в линию второго порядка;

б) полюс и его поляра относительно исходной линии переходят соответственно в полюс и его поляру относительно образа этой линии;

в) полярно сопряженные точки и прямые относительно исходной линии переходят соответственно в полярно сопряженные точки и прямые относительно образа этой линии.

192. Доказать следующее предложение:

если вершины A, B, C, D полного четырехвершинника $ABCD$ принадлежат линии второго порядка G, то поляра каждой диагональной точки четырехвершинника $ABCD$ проходит через остальные две его диагональные точки.

193. Касательные в точках A и B овальной линии второго порядка G пересекаются в точке O; касательная к линии G в произвольной точке M, отличной от A и B, пересекает прямые OA, OB и AB соответственно в точках M_1, M_2 и M_3. Показать, что $M_1M_2 \overset{h}{-} M_3M$.

194. Простой шестивершинник Ω_1 вписан в овальную линию второго порядка G; простой шестивершинник Ω_2 образован касательными к G в вершинах шестивершинника Ω_1; предполагается, что порядки вершин и сторон шестивершинников согласованы друг с другом. Показать, что точка Брианшона шестивершинника Ω_2 является по отношению к G полюсом прямой Паскаля шестивершинника Ω_1.

195. Пусть G — данная линия второго порядка, P — точка, ей не принадлежащая, p — поляра точки P относительно G. Показать, что инволюционная гомология (см. задачу 142) с центром в точке P и осью p преобразует линию G в себя.

196. Найти множество полюсов всех касательных к линии G_1 $(x_1^2 - 3x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_3 = 0)$ относительно линии G_2 $(x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 0)$.

2. Точки и прямые, сопряженные относительно линии второго порядка

197. На прямой $2x_1 - x_2 - 9x_3 = 0$ найти точку, сопряженную точке A $(-1 : 2 : 1)$ относительно линии второго порядка:

$$x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0.$$

198. Дана овальная линия второго порядка G и две различные прямые a и b, которые не сопряжены относительно линии G. Каждой точке M прямой a поставлена в соответствие точка M' прямой b, сопряженная точке M относительно G. Доказать, что это отображение $\sigma : a \to b$ является проективным.

199. Даны овальная линия второго порядка G и прямая l, которая не касается данной линии. Доказать, что преобразование прямой l, при котором каждой точке $A \in l$ отвечает точка $A' \in l$, сопряженная точке A относительно данной линии G, есть инволюция. Она называется *инволюцией сопряженных точек*.

200. Доказать, что линия второго порядка G определяется однозначно, если даны три ее точки A, B, C и инволюция σ сопряженных относительно G точек на данной прямой m (см. задачу 199). (Предполагается, что прямая m не проходит ни через одну из точек A, B, C и не является касательной к линии G.)

201. Найти уравнение проходящей через точку E линии второго порядка G в проективной системе координат $O_1O_2O_3E$, если O_2 является полюсом прямой O_1O_3 по отношению к G, а инволюция, преобразующая точку O_1 в точку O_3 и точку E_2 $(1 : 0 : 1)$ в точку F_2 $(1 : 0 : -1)$, является инволюцией точек прямой O_1O_3, сопряженных относительно G (см. задачу 199).

202. Прямая m пересекает стороны BC, CA, AB автополярного трехвершинника[1] ABC невырожденной линии второго порядка G соответственно в точках P, Q, R. Точки P', Q' и R' расположены соответственно на сторонах BC, CA, AB так, что пары P и P', Q и Q', R и R' сопряжены относительно линии G. Доказать, что прямые AP', BQ', CR' принадлежат одному пучку. Сформулировать двойственное предложение.

---

[1] Трехвершинник называется *автополярным* для линии второго порядка G, если все его вершины попарно сопряжены относительно линии G.

203. Доказать, что если две пары противоположных вершин A, D и B, E полного четырехсторонника сопряжены относительно линии второго порядка G, то сопряженной по отношению к G будет и третья пара C, F противоположных вершин этого четырехсторонника. Предполагается, что стороны AB и DE не сопряжены относительно линии G.

204. На плоскости дан трехвершинник ABC, вершины которого не являются полюсами противоположных сторон относительно данной линии второго порядка G. Доказать, что точки A', B', C', расположенные на сторонах BC, AC, AB и сопряженные соответственно точкам A, B, C, коллинеарны.

205. Трехвершинники ABC и $A'B'C'$ называются п о л я р н ы м и относительно невырожденной линии второго порядка G, если вершины A, B, C одного из них являются по отношению к G соответственно полюсами сторон $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ другого. Доказать, что указанное свойство трехвершинников ABC и $A'B'C'$ взаимно и что два полярных трехвершинника ABC и $A'B'C'$ всегда перспективны (т. е. прямые AA', BB', CC' принадлежат одному пучку).

206. На плоскости линии второго порядка G дана прямая a. Найти множество Ω всех прямых x, каждая из которых сопряжена с прямой a. Выяснить условие, при котором $a \in \Omega$.

207. Если трехвершинник ABC вписан в линию второго порядка G и прямая l сопряжена относительно G стороне AB этого трехвершинника, то на сторонах AC и BC прямая l высекает сопряженные относительно G точки. Доказать это предложение и сформулировать (и тем самым доказать) утверждение, ему двойственное (п р е д л о ж е н и е Ш т а у д т а).

208. Даны линия второго порядка G, прямая a и точка A, не принадлежащая G и a и не являющаяся полюсом прямой a. Через точку A проведена произвольная прямая, пересекающая прямую a в точке M, а линию G — в точках N и N'. Найти множество всех точек X, сопряженных с точкой M по отношению к линии G.

209. Даны инволюция σ на прямой p и точка P ($P \notin p$). Доказать, что через каждую точку M плоскости, не совпадающую с P и не лежащую на p, проходит одна и только одна линия второго порядка, относительно которой точка P является полюсом прямой p, а σ — инволюцией сопряженных точек (см. задачу 199).

210. Пусть Ω — множество всех линий второго порядка, относительно каждой из которых данная инволюция σ на данной прямой p является инволюцией сопряженных точек (см. задачу 199). Точка P ($P \notin p$) — полюс прямой p. Доказать, что для каждой пары прямых l, m, проходящих через точку P, найдутся такие две точки A, B, что перспективное отображение $\sigma_1 : (l) \xrightarrow{A} (m)$ или $\sigma_2 : (l) \xrightarrow{B} (m)$ преобразует точку $X \in G \cap l$ в точку $X' \in G \cap m$, где G — любая из линий множества Ω.

211. Даны четыре точки общего положения O_1, O_2, O_3, E и точка P, не лежащая на прямых O_1M_{23}, O_2M_{13}, O_3M_{12} (относительно обозначений см. задачу 103). Показать, что все линии второго порядка, которые проходят через точки O_1, O_2, O_3 и для которых точки P и E являются сопряженными, содержат некоторую фиксированную точку плоскости.

212. Доказать, что множество полюсов всех касательных к линии второго порядка G_1 относительно линии второго порядка G_2 есть невырожденная линия второго порядка G. (Предполагается, что линии G_1, G_2 — невырожденные.)

213. Отображение σ множества точек плоскости на множество прямых той же плоскости, при котором прямая $\sigma(M)$ есть поляра точки M относительно данной невырожденной линии второго порядка G, называется *полярным преобразованием* (*поляритетом*) плоскости относительно линии G. Доказать, что в условиях задачи 212 сопряженные относительно G_1 точки (прямые) при полярном отображении относительно G_2 переходят в прямые (точки), сопряженные по отношению к линии G.

3. Задачи на построение

В задачах настоящего пункта предполагается, что все точки данной линии второго порядка построены.

214. Пользуясь задачей 192, указать способ построения поляры данной точки P относительно данной овальной линии второго порядка.

215. Даны точки A, B, C, D, E и M, причем первые пять точек образуют группу точек общего положения. Построить поляру точки M относительно линии второго порядка G, проходящей через точки A, B, C, D и E (линия G не считается заданной).

216. Дана невырожденная линия второго порядка G и точка A. Построить касательные к линии G, проходящие через точку A. Рассмотреть два случая: а) $A \notin G$; б) $A \in G$.

217. Построить полюс данной прямой l относительно данной линии второго порядка.

218. На плоскости даны линия второго порядка G, точка M и прямая l. На прямой l построить точку, сопряженную точке M относительно G.

219. Построить прямую, проходящую через данную точку L и сопряженную данной прямой m относительно данной линии второго порядка G.

220. На двух прямых a и b, пересекающихся на данной линии второго порядка G, построить точки, сопряженные относительно G, так, чтобы прямая, их соединяющая, проходила через данную точку M.

221. Через две точки, лежащие на одной касательной к данной линии второго порядка, провести сопряженные прямые так, чтобы точка их пересечения лежала на данной прямой.

222. Даны поляры a и b данных различных точек A и B относительно линии второго порядка G. Построить поляру точки C, лежащей на прямой AB (точки линии G не считаются построенными).

223. Сформулировать и решить задачу, двойственную задаче 222.

§ 9*. Проективное преобразование точек овальной линии второго порядка

Пусть G — овальная линия второго порядка. Сложным отношением четырех точек A, B, C, D этой линии называется число $\alpha = (SA, SB, SC, SD)$, где S — любая точка линии G. (В случае, когда S совпадает с одной из данных точек, скажем с точкой A, за прямую SA следует принять касательную к линии G в точке A.) Легко показать, что число α не зависит от выбора точки S (см. задачу 172), поэтому заданием точек A, B, C и D их сложное отношение определяется однозначно.

Взаимно-однозначное отображение $\sigma : G \to G'$, где G и G' — овальные линии второго порядка, называется проективным, если при этом отображении остается неизменным сложное отношение соответствующих четверок точек линий G и G'. Можно показать, что *проективное отображение* $\sigma : G \to G'$ *однозначно определяется заданием трех различных точек линии* G *и их образов, принадлежащих линии* G'.

С каждым проективным отображением $\sigma : G \to G'$ можно связать проективное отображение пучков. В самом деле, пусть M — произвольная точка линии G, а $M' = \sigma(M)$. Если на линиях G и G' взять произвольные точки O и O' и каждой прямой OM поставить в соответствие прямую $O'M'$, то тем самым определяется проективное отображение пучков $\bar{\pi} : [O] \to [O']$. Будем говорить, что отображение σ порождено отображением $\bar{\pi}$.

Если $G = G'$, то проективное отображение называется проективным преобразованием. Проективное преобразование линии G будем обозначать так: $\pi : G \to G$.

1*. Свойства проективных отображений овальной линии второго порядка

224. Дана овальная линия второго порядка G, две ее точки S_1 и S_2 и прямая l, не проходящая через S_1 и S_2. Пусть M — произвольная точка линии G, m — прямая S_1M (в случае, если $M = S_1$, то m — касательная линии G в точке S_1), $M_0 = m \cap l$, M' — точка пересечения прямой S_2M_0 с линией G, отличная от S_2 (или S_2, если (S_2M_0) — касательная к G). Доказать, что отображение $\sigma : G \to G$, при котором $M' = \sigma(M)$, есть проективное преобразование линии G. Найти неподвижные точки этого преобразования.

225. Пусть $\pi : P_2 \to P_2$ — проективное преобразование плоскости P_2, при котором овальная линия второго порядка G переходит в овальную линию второго порядка G'. Доказать, что отображение $\sigma : G \to G'$, при котором каждой точке M линии G соответствует точка $M' = \pi(M)$ линии G', является проективным; σ называется отображением, индуцированным исходным проективным преобразованием π. (В случае, когда $G' = G$, отображение σ называется проективным преобразованием линии G, индуцированным π).

226. Пусть G и G' — две овальные линии второго порядка; A, B и C — три различные точки линии G, а A', B', C' — три различные точки линии G'. Показать, что существует одно и только одно проективное отображение $\sigma : G \to G'$, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B' и C'.

227. Дана овальная линия второго порядка G и точка P, не принадлежащая этой линии. Каждой точке M линии G поставим в соответствие вторую точку M' пересечения прямой PM с линией G (если (PM) является касательной, то $M' = M$). Доказать, что построенное таким образом отображение $\sigma : G \to G$ — проективное преобразование.

228. При проективном преобразовании $\sigma : G \to G$ линии второго порядка G имеем:

$A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$, $C' = \sigma(C)$, $D' = \sigma(D)$, ... Показать, что точки $(AB') \cap (A'B)$, $(AC') \cap (A'C)$, $(AD') \cap (A'D)$,..., $(BC') \cap (B'C)$, $(BD') \cap (B'D)$, ... лежат на одной прямой, которая носит название *оси преобразования* σ.

229. На основе принципа двойственности определить понятия «сложное отношение четырех прямых пучка второго порядка Ω» и «проективное преобразование пучка Ω».

230. Если нетождественное проективное преобразование $\sigma : G \to G$ линии второго порядка G удовлетворяет соотношению $\sigma^{-1} = \sigma$, то оно называется *инволюцией линии* G. Показать, что все прямые, соединяющие пары точек линии G, соответствующие друг другу в инволюции σ, проходят через одну и ту же точку P, называемую *центром инволюции* σ. Установить также, что P есть полюс оси инволюции σ (см. задачу 228) по отношению к G.

231. Показать, что преобразование, рассмотренное в задаче 227, является инволюцией овальной линии второго порядка G. Найти центр и ось этой инволюции, а также неподвижные точки.

232. Через точку N к овальной линии второго порядка G проведены касательные NA и NC, где A и C — точки касания. Кроме того, через точку N проведена произвольная секущая, которая пересекает линию G в точках B и D. Доказать, что четыре точки A, C, B и D образуют на G гармоническую четверку, т. е. сложное отношение этих точек равно —1.

233. Дано проективное преобразование σ овальной линии второго порядка G, не являющееся инволюцией (см. задачу 230). Доказать: а) прямые, соединяющие точку M линии G с ее образом $M' = \sigma(M)$, образуют овальный пучок прямых второго порядка; б) множество всех точек пересечения касательных к G в точках M и M' — овальная линия второго порядка.

2*. Задачи на построение

При решении задач настоящего пункта построенными считаются только данные точки и прямые. Поэтому, если, например, в условии задачи фигурирует овальная линия второго порядка, то ее точки, за исключением данных, не являются построенными. Исключение составляют задачи 243—247, где предполагается, что все точки данной линии второго порядка являются построенными.

234. Для проективного преобразования σ овальной линии второго порядка G даны три пары соответствующих точек: A и $A' = \sigma(A)$; B и $B' = \sigma(B)$; C и $C' = \sigma(C)$. Построить образ $M' = \sigma(M)$ данной точки $M \in G$.

235. Пользуясь понятием оси преобразования (см. задачу 228), построить неподвижные точки преобразования σ.

236. Для проективного преобразования $\sigma : (l) \to (l)$ прямой (l) даны три пары соответственных точек A, $A' = \sigma(A)$; B, $B' = \sigma(B)$; C, $C' = \sigma(C)$. Вводя в рассмотрение вспомогательное проективное преобразование $\pi : G \to G$, где G — некоторая данная овальная линия второго порядка, построить неподвижные точки преобразования σ.

237. Даны три точки L, M, N и три прямые a, b, c. Построить трехвершинник ABC, вершины A, B, C которого лежат соответственно на прямых a, b, c, а стороны BC, AC и AB проходят соответственно через точки L, M, N.

238. Построить точки пересечения овальной линии второго порядка, заданной пятью точками, с данной прямой l.

239. Через данную точку P провести касательные к овальной линии второго порядка, заданной пятью точками.

240. Известно, что овальная линия второго порядка G проходит через данные четыре точки A, B, C, D и касается данной прямой h; построить точку касания прямой h к линии G.

241. На линии второго порядка G две инволюции $\sigma_1 : G \to G$ и $\sigma_2 : G \to G$ заданы двумя парами построенных точек: A_1, $A_1' = \sigma(A_1)$; B_1, $B_1' = \sigma_1(B_1)$ и A_2, $A_2' = \sigma_2(A_2)$; B_2, $B_2' = \sigma_2(B_2)$. Построить общую пару точек данных инволюций.

242. На прямой l даны две инволюции: $\sigma_1 : (l) \to (l)$ и $\sigma_2 : (l) \to (l)$, каждая из них двумя парами построенных точек: A_1, $A_1' = \sigma_1(A_1)$; B_1, $B_1' = \sigma_1(B_1)$ и A_2, $A_2' = \sigma_2(A_2)$; B_2, $B_2' = \sigma_2(B_2)$. Построить общую пару точек данных инволюций.

243. Даны две овальные линии второго порядка [1] G и G'. На данной прямой l построить пару точек M и M', сопряженных относительно обеих линий G и G'.

244. В данную овальную линию второго порядка G вписать трехвершинник, стороны которого проходят через три данные точки L, M, N (з а д а ч а К а с т и л ь о н а).

245. Даны овальная линия второго порядка G и три точки K, L и M. Вписать в линию G четырехвершинник $ABCD$ так, чтобы его стороны AB и CD проходили соответственно через точки K и L, а стороны BC и AD пересекались в точке M.

---

[1] В задачах 243—247 предполагается, что все точки данной линии второго порядка являются построенными.

246. Построить трехвершинник, описанный около данной овальной линии второго порядка, вершины которого лежат соответственно на трех данных прямых.

247. Даны овальная линия второго порядка G и три прямые k, l и m. Описать около линии G четырехвершинник $ABCD$ так, чтобы его вершины A и C лежали на прямой m, B — на прямой k, а D — на прямой l.

Глава III

АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ С ПРОЕКТИВНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ; ПРИЛОЖЕНИЯ К ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В настоящей главе помещены задачи, относящиеся к следующим темам программы: «Геометрия на проективной плоскости с фиксированной прямой» и «Приложения проективной геометрии к решению тех задач элементарной геометрии, которые имеют аффинный характер».

Предполагается, что все геометрические образы, встречающиеся в задачах этой главы, являются объектами проективной плоскости P_2, на которой зафиксирована прямая p^*. Эта плоскость обозначается через P_2^*, прямая p^* называется абсолютом плоскости P_2^*. Две различные прямые a и b плоскости P_2^*, отличные от p^*, называются сходящимися, если $a \cap b \in p^*$. Множество всех точек плоскости P_2^*, не инцидентных p^*,— аффинная плоскость (обозначается через $\overline{P}_2^*$). Абсолют плоскости P_2^* называется несобственной прямой, а все его точки — несобственными точками по отношению к плоскости $\overline{P}_2^*$. Они, очевидно, не принадлежат плоскости $\overline{P}_2^*$. Две сходящиеся или совпадающие прямые плоскости P_2^* называются параллельными прямыми плоскости $\overline{P}_2^*$.

§ 10. Геометрия плоскостей P_2^* и $\overline{P}_2^*$

1. Аффинные коллинеации

Коллинеации плоскости P_2^*, оставляющие инвариантным абсолют p^*, называются аффинными коллинеациями. Каждая аффинная коллинеация плоскости P_2^* индуцирует преобразование точек и прямых плоскости $\overline{P}_2^*$, которое называется аффинным преобразованием этой плоскости.

248. Пусть A, B, C и A', B', C' — две тройки неколлинеарных точек, не лежащих на абсолюте. Доказать, что существует одна и только одна аффинная коллинеация плоскости $\overline{P}_2^*$, при которой точки A. B, C переходят соответственно в точки A', B', C'.

249. Показать, что если три неколлинеарные точки A, B и C не лежат на абсолюте, то аффинная коллинеация, оставляющая эти точки неподвижными, является тождественным преобразованием.

250. На прямой l, отличной от абсолюта p^*, даны три различные точки A, B и C, ни одна из которых не совпадает с точкой $I = l \cap p^*$. Будем говорить, что точка B лежит между точками A и C, если $IB \div AC$ (обозначение: $A\overset{\times}{B}C$). Доказать:

а) если $A\overset{\times}{B_1}C$ и $A\overset{\times}{B_2}C$, то B_1 и B_2 принадлежат одному и тому же проективному отрезку, определяемому точками A и C;

б) если $A\overset{\times}{B}C$ и $A\overset{\times}{C}D$, то $A\overset{\times}{B}D$.

251. Пусть A и B — различные точки плоскости $\overline{P}_2^*$. Отрезком с концами в этих точках называется множество, состоящее из точек A и B и всех точек, лежащих между A и B (см. задачу 250). Доказать, что при аффинных преобразованиях плоскости $\overline{P}_2^*$ любой отрезок переходит в отрезок.

252. В плоскости $\overline{P}_2^*$ даны прямая l и различные точки O и M, принадлежащие l. Лучом прямой l с началом в точке O называется множество, состоящее из точки O и всех точек M', удовлетворяющих условию $M'\overset{\times}{O}M$. Углом (h,l) (по Гильберту) называется объединение двух лучей с общим началом, не лежащих на прямой [1]. Доказать:

а) при аффинных преобразованиях плоскости $\overline{P}_2^*$ каждый луч переходит в луч;

б) любые два угла аффинно эквивалентны, т. е. существует аффинная коллинеация, переводящая любой угол (h,l) в любой другой угол (h',l').

253. В плоскости $\overline{P}_2^*$ серединой отрезка AB назовем точку E, удовлетворяющую условию $EI \overset{h}{-} AB$, где $I = (AB) \cap p^*$. Доказать:

а) середина отрезка AB лежит между точками A и B;

б) существует аффинное преобразование плоскости $\overline{P}_2^*$, при котором точки A и E переходят соответственно в точки B и E.

254. Простым отношением трех точек A, B и C прямой l плоскости $\overline{P}_2^*$ называется число $\alpha = -(ABCI)$, где $I = l \cap p^*$ (обозначение: $\alpha = (ABC)$). Говорят также, что точка C делит отрезок AB в отношении α. Доказать:

а) если $(ABC) > 0$, то $A\overset{\times}{C}B$;

б) середина любого отрезка делит этот отрезок в отношении 1;

---

[1] Заметим, что понятие «угол по Гильберту» отличается от школьного определения угла как фигуры, состоящей из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части полуплоскости. Во избежание путаницы условимся в дальнейшем термин «угол» понимать как «угол по Гильберту».

в) если A, B, C, D — четыре различные точки одной прямой, то

$$\frac{(ABC)}{(ABD)} = (ABCD);$$

г) аффинные преобразования сохраняют простое отношение точек.

255. Отрезок *направленный*, если его концы заданы в определенном порядке. Направленные отрезки A_1B_1 и A_2B_2 плоскости $\overline{P}_2^*$, лежащие на различных параллельных прямых, называются *конгруэнтными*, если $(A_1A_2) \parallel (B_1B_2)$. Обобщить понятие конгруэнтных направленных отрезков на случай, когда отрезки лежат на одной прямой, и доказать, что это отношение на множестве направленных отрезков рефлексивно, симметрично и транзитивно.

256. Преобразование σ плоскости $\overline{P}_2^*$ переводит любые три различные коллинеарные точки A, B и C в коллинеарные точки A', B', C', причем $(ABC) = (A'B'C')$. Доказать, что σ — аффинное преобразование.

257. Отображение σ плоскости $\overline{P}_2^*$ на себя, которое переводит точку A в A_1, называется *параллельным переносом*, если для любой точки M и ее образа M' направленные отрезки MM' и AA_1 конгруэнтны (см. задачу 255). Доказать:

а) параллельный перенос — параболическая гомология, ось которой — несобственная прямая;

б) параллельный перенос определяется любой парой соответственных точек;

в) множество, состоящее из всех параллельных переносов и тождественного преобразования, есть группа.

258. Пусть σ — параллельный перенос, а $\varkappa$ — аффинное преобразование. Доказать, что преобразование $\sigma' = \varkappa\sigma\varkappa^{-1}$ есть параллельный перенос.

259. *Аффинной гомологией* плоскости $P_2{}^*$ называется всякая аффинная коллинеация, являющаяся гомологией [1]. Доказать, что если ось гомологии не совпадает с абсолютом, то центр гомологии лежит на абсолюте.

260. *Гомотетией* $\overline{\gamma}$ с центром S называется аффинное преобразование, которое индуцируется на $\overline{P}_2^*$ аффинной гомологией γ с собственным центром S. Доказать:

а) осью аффинной гомологии γ, соответствующей гомотетии $\overline{\gamma}$, является несобственная прямая;

б) каждая прямая при гомотетии переходит в прямую, ей параллельную;

в) простое отношение $K = -(M'MS)$ (коэффициент гомотетии) для гомотетии не зависит от выбора пары соответствующих точек M, M';

---

[1] См. введение к § 6.

г) гомотетия определяется центром S и парой соответствующих точек M, M';

д) гомология с несобственной осью индуцирует на аффинной плоскости $\overline{P}_2^*$ либо гомотетию, либо параллельный перенос;

е) произведение $\overline{\gamma}$ двух гомотетий $\overline{\gamma}_1$ и $\overline{\gamma}_2$ является либо гомотетией (если произведение коэффициентов k_1 и k_2 гомотетий не равно 1), либо параллельным переносом (или тождественным преобразованием), если $k_1k_2 = 1$. Центр S соответствующей аффинной гомологии γ лежит на прямой, соединяющей центры S_1 и S_2 данных гомотетий;

ж) совокупность Ω всех гомотетий, параллельных переносов и тождественного преобразования есть подгруппа группы аффинных преобразований.

261. Аффинная гомология плоскости P_2^*, ось которой не совпадает с абсолютом, индуцирует на $\overline{P}_2^*$ преобразование, называемое *родством*. Если исходная гомология является гиперболической (параболической), то родство называется гиперболическим (параболическим). Ось гомологии называется *осью родства*. Доказать:

а) какова бы ни была прямая g плоскости $\overline{P}_2^*$, всегда существует гиперболическое (или параболическое) родство с осью g;

б) все неподвижные точки родства плоскости $\overline{P}_2^*$ принадлежат оси g;

в) если при гиперболическом родстве точка M, не лежащая на оси, переходит в M' и $M_0 = (MM') \cap g$, то (M_0MM') не зависит от выбора точки M (родство является растяжением);

г) если родство параболическое (центр принадлежит оси) и (A, A') — фиксированная пара соответствующих точек, то для всякой точки N прямой AA' и ей соответствующей точки N' отрезок NN' конгруэнтен отрезку AA', а для произвольной точки M, не принадлежащей прямой AA', и ей соответствующей точки M' прямые MM' и AA' параллельны. В этом случае $(OMA) = (OM'A')$, где O — точка пересечения прямых AM и $A'M'$ (родство второго рода); O принадлежит оси.

2. Линии второго порядка на плоскости $\overline{P}_2^*$

Если Γ — линия второго порядка на плоскости P_2^*, то множество $\overline{\Gamma}$ всех точек этой линии, принадлежащих плоскости $\overline{P}_2^*$, называется *линией второго порядка плоскости* $\overline{P}_2^*$. Если невырожденная линия плоскости P_2^* пересекает абсолют в двух точках, касается абсолюта или не пересекает абсолют в действительных точках, то линия $\overline{\Gamma}$ называется соответственно *гиперболой*, *параболой* или *эллипсом*. В случае гиперболы касательные в точках пересечения линии с абсолютом называются *асимптотами*. Полюс абсолюта относительно линии второго порядка называется *центром*, поляра любой точки абсолюта — *диаметром*. Полярно сопряженные диаметры называются *сопряжен-*

ными диаметрами, прямые, сопряженные диаметру,— сопряженными хордами.

262. Дан четырехугольник $ABCD$. Сторона AD скользит по неподвижной прямой l так, что направленный отрезок AD остается конгруэнтным самому себе, а противоположная сторона BC неподвижна. Найти множество всех точек пересечения прямых AC и BD.

263. Доказать, что если линия второго порядка $\bar{\Gamma}$ имеет центр, то этот центр является серединой любой хорды, через него проходящей.

264. Доказать, что любой диаметр линии второго порядка содержит середины всех хорд, сопряженных этому диаметру.

265. Какой особенностью обладают полярно сопряженные точки относительно параболы, если они лежат на одном ее диаметре?

266. Какой особенностью обладают полярно сопряженные точки относительно гиперболы, если они лежат на прямой l, параллельной асимптоте?

267. Какой особенностью обладают поляры точек, лежащих на асимптоте гиперболы?

268. Доказать, что если две касательные к линии второго порядка параллельны, то прямая, соединяющая точки их касания, является диаметром.

269. Через точку M гиперболы проведены две прямые a и b, параллельные разным асимптотам. Найти множество всех прямых, соединяющих полярно сопряженные точки прямых a и b.

270. Доказать, что хорды прикосновения (прямые, соединяющие точки касания) касательных к линии второго порядка $\bar{\Gamma}$, проведенных из точек одного диаметра, параллельны.

271. Доказать, что отрезок касательной к гиперболе, заключенный между ее асимптотами, делится точкой касания пополам.

272. Прямая l пересекает гиперболу в точках A и B, а ее асимптоты — в точках P и Q. Доказать, что отрезки AB и PQ имеют общую середину.

273. Доказать, что линия второго порядка однозначно определяется двумя парами сопряженных диаметров и одной касательной.

274. Касательная к гиперболе пересекает ее асимптоты в точках A и B. Доказать, что любые две параллельные прямые, одна из которых проходит через точку A, а другая — через точку B, полярно сопряжены относительно данной гиперболы.

§ 11. Приложения проективной геометрии к решению задач элементарной геометрии

В этом параграфе представлены задачи элементарной геометрии аффинного характера, при решении которых применяются методы проективной геометрии. При решении этих задач следует плоскость дополнить несобственной прямой и полученную таким образом расширенную плоскость рассматривать как модель проективной плоскости.

1. Задачи на доказательство

275. Доказать, что средняя линия треугольника параллельна основанию.

276. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

277. Доказать, что прямая, соединяющая точку M пересечения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ с точкой H пересечения ее диагоналей, делит оба основания трапеции пополам.

278. На сторонах CB и CA треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $(CBM) = (CAN)$. Доказать, что точка $O = (AM) \cap (BN)$ лежит на медиане треугольника ABC, проходящей через вершину C.

279. Каждая вершина треугольника ABC соединена с двумя точками, расположенными на противоположной стороне и делящими эту сторону на три попарно конгруэнтных отрезка. Доказать, что у шестиугольника, образованного проведенными шестью прямыми, диагонали, соединяющие противоположные вершины, принадлежат одному пучку.

280. В четырехугольник $ABCD$ вписана трапеция $MNPQ$, стороны которой MN и PQ параллельны его диагонали AC. Доказать, что непараллельные стороны трапеции пересекаются на другой диагонали.

281. Дан треугольник ABC и три параллелограмма, для каждого из которых одна сторона треугольника служит диагональю, а две другие — смежными сторонами. Доказать, что вторые диагонали этих параллелограммов пересекаются в одной точке.

282. Прямая l не проходит через вершины треугольника $A_1A_2A_3$ и пересекает прямые A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 соответственно в точках P_3, P_1 и P_2. Возьмем любую пару из этих трех точек P_i, P_j и через каждую из них проведем прямую, параллельную той стороне треугольника, на которой лежит другая точка; обозначим через M_{ij} точку пересечения этих прямых. Доказать, что полученные три точки M_{12}, M_{13} и M_{23} коллинеарны.

283. Дана окружность Ω и прямая a. Произвольные секущие l и l' пересекают окружность соответственно в точках A и B, A' и B', а прямую a — в точках C и C'. Прямые BC' и CA' пересекают окружность Ω в точках A_0 и B_0, отличных от B и A'. Доказать, что точка $C_0 = (AB') \cap a$ лежит на прямой A_0B_0.

284. Пусть $A_1A_2B_2B_1$ — трапеция с параллельными сторонами A_1A_2 и B_1B_2. Через вершины A_1 и B_1 проведены параллельные прямые a_1 и b_1, а через вершины A_2 и B_2 — параллельные прямые a_2 и b_2, причем $a_1 \nparallel a_2$. Доказать, что точки $(A_1B_1) \cap (A_2B_2)$, $a_1 \cap a_2$ и $b_1 \cap b_2$ коллинеарны.

285. Дана окружность и три пары касательных a, a', b, b' и c, c', причем $a \parallel a'$ и $b \parallel b'$. Пусть $A = a \cap c$, $B = b \cap c$, $A' = a' \cap c'$, $B' = b' \cap c'$. Доказать, что прямые AB' и BA' параллельны.

2. Геометрические построения, выполняемые одной линейкой

Ниже представлены задачи на построение, которые следует выполнить на аффинной плоскости при помощи одной линейки. Для их решения целесообразно дополнить плоскость несобственными элементами и каждую из задач сформулировать в терминах проективной геометрии. Таким образом, представленные здесь задачи сводятся к задачам на построение на проективной плоскости P_2^* с абсолютом. Следует подчеркнуть, что несобственные точки и несобственная прямая не могут быть данными или построенными объектами.

286. Даны две различные параллельные прямые и отрезок AB, концы которого принадлежат одной из них. Построить середину отрезка AB.

287. Даны две различные параллельные прямые и отрезок AB, концы которого принадлежат одной из них. Построить такую точку X отрезка AB, что $(ABX) = \frac{1}{2}$.

288. Даны две различные параллельные прямые и отрезок AB, концы которого принадлежат одной из них. Построить такую точку X отрезка AB, что $(ABX) = \frac{1}{n-1}$, где n — натуральное число.

289. Даны отрезок AB, его середина C и точка P, не лежащая на прямой AB. Построить прямую, проходящую через точку P и параллельную прямой AB.

290. Даны две различные параллельные прямые и точка, не лежащая на них. Через эту точку провести прямую, параллельную данным прямым.

291. Даны две различные параллельные прямые и различные точки A и B на одной из них. Построить такую точку X, что точка B — середина отрезка AX.

292. Дан отрезок AB, его середина C и точка M прямой AB. Построить такую точку X прямой AB, что отрезки MX и AB конгруэнтны.

293. На плоскости даны параллелограмм и прямая c. Построить прямую, проходящую через данную точку P и параллельную прямой c. Рассмотреть два случая: а) точка P лежит на одной из прямых, содержащих сторону параллелограмма; б) точка P не лежит на прямых, содержащих стороны параллелограмма.

294. Дан треугольник, его средняя линия и прямая l. Построить прямую, проходящую через данную точку P и параллельную прямой l.

295. Даны две прямые a и a' ($a \cap a' = A$) и точка M, не лежащая на этих прямых. Построить прямую, проходящую через точки M и A. Предполагается, что точка A является недоступной [1].

296. Даны две пары пересекающихся прямых a, a' и b, b'. Построить прямую AB ($A = a \cap a'$, $B = b \cap b'$) в предположении, что A и B — недоступные точки.

---

[1] Точный смысл этого термина заключается в том, что при выполнении построения запрещается пользоваться точкой A.

297. Построить прямую, проходящую через недоступную точку пересечения двух данных прямых и параллельную двум другим данным параллельным прямым.

298. Даны прямые a, a', b, b' и c, причем $a \cap a' = P$, $b \cap b' = Q$, $P \notin c$, $Q \in c$. Предполагается, что прямая PQ является недоступной [1]. Построить прямую, соединяющую данную точку M с точкой пересечения прямых c и PQ.

§ 12*. Аффинные построения на проективной модели

В этом параграфе представлены задачи на построение в аффинной плоскости. Основными объектами будем считать точки и прямые, а основными понятиями — понятие построенного основного объекта и операцию построения основного объекта.

Основные понятия удовлетворяют постулатам построения, перечисленным ниже. Первые два предложения постулируют существование построенных основных объектов.

А. На плоскости существуют по крайней мере три неколлинеарные построенные точки.

Б. Основные объекты (точки и прямые), заданные условиями задачи, считаются построенными.

Остальные постулаты построения характеризуют операцию построения новых объектов, т. е. допустимые шаги построения.

В. Построение прямой, проходящей через две построенные точки.

Г. Построение точки пересечения двух непараллельных построенных прямых.

Д. Построение прямой, проходящей через построенную точку A и параллельной построенной прямой l, $A \notin l$.

При решении задач данного параграфа рекомендуется каждую задачу сформулировать в терминах проективной геометрии на плоскости P_2^* и решить ее одной линейной, пользуясь точками абсолюта p^*.

1*. Простейшие построения

299. Построить середину данного отрезка.

300. Даны две параллельные прямые a и b и три различные точки: $A \in a$, $B \in a$, $C \in b$. Построить такую точку X прямой b, что отрезки AB и CX конгруэнтны. Рассмотреть два случая: а) $a \neq b$; б) $a = b$.

301. Построить точку пересечения медиан данного треугольника.

302. Даны две смежные вершины A, B и центр O параллелограмма. Построить остальные две вершины C и D.

2*. Задачи на построение с применением теорем Паскаля и Брианшона для гиперболы и параболы

В задачах настоящего пункта предполагается выполнить построения с применением теорем Паскаля и Брианшона и их предельных

[1] Т. е. при выполнении построения запрещается пользоваться прямой PQ.

случаев. При этом мы предполагаем, что заданы лишь отдельные точки и прямые, определяющие гиперболы и параболы, которые фигурируют в условиях задач, а не сами гиперболы и параболы.

303. Даны две асимптоты и одна из точек гиперболы. Построить еще одну точку гиперболы и касательную в этой точке.

304. Дана одна асимптота и три различные точки гиперболы. Построить: а) еще одну точку гиперболы и касательную в этой точке; б) какую-либо прямую второго асимптотического направления; в) вторую асимптоту.

305. Даны асимптота гиперболы, точка гиперболы, касательная в этой точке и прямая, параллельная второй асимптоте. Построить вторую асимптоту.

306. Даны две различные точки гиперболы, касательная в одной из них и две прямые, параллельные асимптотам. Построить асимптоты гиперболы.

307. Дана одна асимптота гиперболы, две ее точки и касательная в одной из них. Построить еще одну точку гиперболы и касательную в ней.

308. Даны четыре различные точки гиперболы и прямая одного асимптотического направления. Построить: а) асимптоту этого направления; б) точку пересечения данной прямой с гиперболой; в) прямую второго асимптотического направления; г) касательную в одной из данных точек.

309. Даны три различные точки гиперболы, касательная в одной из них и прямая асимптотического направления. Найти точку пересечения этой прямой с гиперболой.

310. Даны следующие точки и прямые, определяющие гиперболу: асимптота; прямая l, параллельная другой асимптоте; точка гиперболы и касательная в этой точке. Построить точку пересечения прямой l с гиперболой.

311. Даны асимптота гиперболы и три ее касательные. Построить еще одну касательную и точку ее касания.

312. Даны асимптоты гиперболы и одна из ее касательных. Построить: а) точку ее касания; б) еще одну касательную.

313. Дан диаметр параболы и три ее точки. Построить: а) еще одну точку параболы; б) касательную в одной из данных точек; в) точку пересечения данного диаметра с параболой.

314. Даны диаметр параболы, касательная в точке пересечения этого диаметра с параболой и точка параболы. Построить несколько точек параболы.

315. Даны диаметр, две точки параболы и касательная в одной из них. Построить касательную в другой точке и еще одну точку параболы.

316. Даны две точки параболы и касательные в этих точках. Построить диаметр, проходящий через точку пересечения данных касательных.

317. Даны четыре различные касательные параболы. Построить: а) точку касания одной из них; б) какой-либо ее диаметр.

318. Дан диаметр параболы и три касательные. Построить: а) точку касания одной из них; б) еще одну касательную.

319. Даны две точки параболы и касательные в этих точках. Построить какой-либо диаметр параболы.

3*. Задачи на построение с применением полярной теории линий второго порядка

В задачах настоящего пункта предполагается, что каждая точка данной линии второго порядка является построенной.

320. Дана центральная линия второго порядка. Построить: а) центр; б) диаметр, параллельный данной прямой.

321. Дана линия второго порядка. Построить диаметр, сопряженный хордам, параллельным данной прямой.

322. Дана линия второго порядка и ее внутренняя точка P. Построить хорду, середина которой — точка P.

323. Построить касательную к данной линии второго порядка, параллельную данной прямой l.

324. Даны линия второго порядка и прямая l неасимптотического направления. Построить касательную к данной линии так, чтобы ее направление было сопряжено с направлением прямой l.

325. Даны следующие точки и прямые, определяющие гиперболу: асимптота; пара прямых, направления которых сопряжены; точка гиперболы и касательная в ней. Построить вторую асимптоту (гипербола не предполагается заданной).

326. На двух прямых одного асимптотического направления данной гиперболы найти такие полярно сопряженные точки, что прямая, их соединяющая, есть диаметр данной гиперболы.

327. На двух диаметрах данной параболы найти такие полярно сопряженные точки, что прямая, их соединяющая, проходит через данную точку.

328. Через две точки асимптоты гиперболы провести такие полярно сопряженные прямые, что точка их пересечения лежит на второй асимптоте.

329. Даны парабола и три прямые l, m, n. Найти такие полярно сопряженные прямые l', m', что $l' \parallel l$, $m' \parallel m$ и точка $l' \cap m'$ принадлежит n.

330. Даны линия второго порядка и две прямые a, b. Построить прямую, параллельную прямой a и имеющую полюс на прямой b.

331. Даны две различные точки A и B и их поляры a и b относительно некоторой линии второго порядка, которая не считается заданной. Построить диаметр, сопряженный прямой AB.

332. Даны пара сопряженных диаметров и асимптота некоторой гиперболы, которая не считается заданной. Построить диаметр, сопряженный третьему данному диаметру.

333. Даны две пары сопряженных диаметров некоторой линии второго порядка, которая не считается построенной. Построить диаметр, сопряженный пятому данному диаметру.

334. Даны асимптоты двух гипербол с общим центром. Построить общую пару сопряженных диаметров, предполагая, что гиперболы не заданы, но на плоскости дана овальная линия, все точки которой построены.

Глава IV

ЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ С ПРОЕКТИВНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ; ПРИЛОЖЕНИЯ К ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В настоящей главе помещены задачи, относящиеся к следующим темам программы: «Евклидова геометрия с проективной точки зрения» и «Приложения проективной геометрии к решению задач элементарной геометрии».

Предполагается, что все геометрические образы, встречающиеся в задачах этой главы, являются объектами проективной плоскости P_2 с фиксированной прямой p^*, на которой дана эллиптическая инволюция ω. Эта плоскость обозначается через P_2^ω, а прямая с эллиптической инволюцией на ней называется абсолютом плоскости P_2^ω и обозначается через p^ω. Множество всех точек плоскости P_2^ω, отличных от абсолюта,—евклидова плоскость (обозначается $\overline{P}_2^\omega$). Прямая p^ω плоскости P_2^ω называется несобственной прямой, а все точки этой прямой — несобственными точками по отношению к плоскости $\overline{P}_2^\omega$. Инволюция ω—абсолютная инволюция. Две прямые a и b плоскости $\overline{P}_2^\omega$ называются параллельными, если $a \cap b \subset p^\omega$. Две прямые называются перпендикулярными (ортогональными), если они пересекают абсолют p^ω в соответствующих точках абсолютной инволюции ω.

§ 13. Геометрия плоскостей P_2^ω и $\overline{P}_2^\omega$; преобразования подобия

1. Преобразования подобия

Мы будем говорить, что аффинная коллинеация сохраняет абсолют p^ω, если при данном преобразовании прямая p^ω является инвариантной и, кроме того, для любой сопряженной пары A, B инволюции ω их образы A' и B' при данной аффинной коллинеации также образуют сопряженную пару той же инволюции.

Аффинные коллинеации, сохраняющие абсолют p^ω, индуцируют на плоскости $\overline{P}_2^\omega$ преобразования, которые называются преобразованиями подобия (подобными преобразованиями). Две фигуры плоскости $\overline{P}_2^\omega$ называются подобными, если существует такое подобное преобразование, которое одну фигуру переводит в другую.

Плоскость P_2^ω называется ориентированной, если несобственная прямая p^ω этой плоскости ориентирована, т. е. на ней выбран один из «естественных» порядков точек в качестве положительного. Важно подчеркнуть, что при любом преобразовании подобия ориентированная плоскость переходит в ориентированную плоскость, при этом ориентация плоскости либо сохраняется, либо меняется на обратную.

Угол (h, k) [1] называется ориентированным, если стороны угла заданы в определенном порядке (именно в том порядке, в котором они записаны). На ориентированной плоскости можно ввести понятие положительной или отрицательной ориентации ориентированного угла. Пусть (h, k) — ориентированный угол, H_∞ и K_∞ — несобственные точки прямых $\bar{h}$ и $\bar{k}$, содержащих соответственно лучи h и k. Пусть далее $H_\infty K_\infty \mid 1$ — внутренний по отношению к углу (h, k) проективный отрезок (см. задачу 343). Если ориентация этого отрезка от точки H_∞ к точке K_∞ совпадает с ориентацией прямой p^ω, то мы будем говорить, что угол (h, k) имеет положительную ориентацию, в противном случае — отрицательную ориентацию.

335. Доказать следующие предложения: а) параллельный перенос (см. задачу 257) является подобным преобразованием плоскости $\bar{P}_2^\omega$, сохраняющим ориентацию плоскости;

б) гомотетия (см. задачу 260) является подобным преобразованием плоскости $\bar{P}_2^\omega$, сохраняющим ориентацию плоскости;

в) параллельный перенос и гомотетия индуцируются аффинными коллинеациями плоскости P_2^ω, которые оставляют все точки абсолюта неподвижными. Доказать, что они являются соответственно параболической и гиперболической гомологиями.

336. Показать, что множество всех подобных преобразований плоскости $\bar{P}_2^\omega$ образует группу.

337. Преобразование называется инволюционным, если при этом преобразовании любая точка M_1 переходит в точку M_2, а точка M_2 переходит в точку M_1. Отражение относительно прямой w — такое преобразование плоскости $\bar{P}_2^\omega$, которое порождается аффинной инволюционной гомологией (см. задачу 259) плоскости P_2^ω, для которой осью служит прямая w, а центром S — образ несобственной точки S_∞ этой прямой w в абсолютной инволюции. Доказать, что отражение является подобным преобразованием.

338. Даны прямая l и две точки A и B, $A \notin l$ и $B \notin l$. Найти множество G всех точек пересечения прямых, содержащих высоты треугольников ABC, если переменная вершина C перемещается по прямой l.

339. Две вершины A и B треугольника ABC зафиксированы. Вершиной C является произвольная точка данной линии второго по-

[1] Относительно определения угла см. задачу 252.

рядка Γ, проходящей через точки A и B. Определить множество всех точек пересечения прямых, содержащих высоты треугольника ABC.

340. Два угла (h, l) и (h', l') называются конгруэнтными, если существует подобное преобразование, переводящее один угол в другой. Доказать, что конгруэнтность углов удовлетворяет требованиям транзитивности, симметричности, рефлексивности.

341. Доказать, что вертикальные углы конгруэнтны.

342. Пусть прямые a и b не параллельны и не перпендикулярны. Доказать, что если $a' \perp a$ и $b' \perp b$, то $A'_\infty B'_\infty \doteq A_\infty B_\infty$, где A_∞, B_∞, A'_∞, B'_∞ — несобственные точки прямых a, b, a', b' соответственно.

343. Пусть (h, k) — угол, H_∞ и K_∞ — несобственные точки прямых, содержащих стороны угла (h, k), а $H_\infty K_\infty \mid 1$ и $H_\infty K_\infty \mid 2$ — два проективных дополнительных отрезка, образованных точками H_∞, K_∞ на несобственной прямой. Доказать следующие предложения:

а) несобственные точки всех прямых, пересекающих одновременно лучи h и k, принадлежат только одному из отрезков $H_\infty K_\infty \mid 1$ или $H_\infty K_\infty \mid 2$. Этот отрезок называется внешним по отношению к углу (h, k), а другой отрезок — внутренним;

б) если a — произвольная прямая, проходящая через вершину O угла и пересекающая внутренний по отношению к углу отрезок несобственной прямой, то все прямые, пересекающие одновременно лучи h и k, пересекают только один из лучей прямой a, исходящих из вершины O. Этот луч называется внутренним лучом угла (h, k).

344. Пусть (h, k) — угол, a и b — прямые, причем $a \perp h$, $b \perp k$, A_∞ и B_∞ — несобственные точки этих прямых. Доказать следующие предложения:

а) если A_∞ принадлежит внешнему по отношению к углу (h, k) отрезку несобственной прямой, то B_∞ принадлежит тому же отрезку. В этом случае $\angle (h, k)$ называется острым;

б) если A_∞ принадлежит внутреннему по отношению к углу (h, k) отрезку несобственной прямой, то B_∞ принадлежит тому же отрезку. В этом случае $\angle (h, k)$ называется тупым.

345. Доказать:

а) при любом преобразовании подобия острый (тупой) угол переходит в острый (тупой) угол;

б) острый угол не конгруэнтен тупому.

346. Угол (h, k) называется прямым, если прямые $\bar{h}$ и $\bar{k}$, содержащие стороны угла, ортогональны. Доказать:

а) при любом преобразовании подобия прямой угол переходит в прямой;

б) любые два прямых угла конгруэнтны.

347. Доказать, что два одинаково ориентированных угла конгруэнтны, если:

а) их стороны соответственно параллельны;

б) их стороны соответственно ортогональны.

348. Пусть a и b — пересекающиеся неперпендикулярные прямые. Величиной угла между прямыми a и b будем называть число φ $(0 < \varphi < \pi)$, удовлетворяющее условию:

$$\cos^2 \varphi = (abb_1a_1),$$

где a_1 и b_1 проходят через точку $a \cap b$ и соответственно перпендикулярны прямым a и b. Доказать:

а) любые две неперпендикулярные пересекающиеся прямые определяют две величины φ_1 и φ_2, причем $\varphi_1 \neq \varphi_2$ и $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$;

б) если пара прямых a, b конгруэнтна паре a', b', то данные пары прямых имеют одни и те же величины.

349. Пусть $\overline{h}$ и $\overline{k}$ — прямые, содержащие стороны угла (h, k). Если угол (h, k) тупой (острый), то величиной этого угла назовем бо́льшую (ме́ньшую) из двух величин угла между прямыми $\overline{h}$ и $\overline{k}$. Величиной прямого угла назовем число $\frac{\pi}{2}$. Доказать, что конгруэнтные углы имеют равные величины, и обратно: если два угла имеют равные величины, то они конгруэнтны.

350. Доказать, что аффинная коллинеация, сохраняющая величину любого угла, является преобразованием подобия.

351. Пусть преобразование подобия σ имеет неподвижную точку S и не имеет неподвижных (или инвариантных) прямых. Доказать:

а) точка S является единственной неподвижной точкой преобразования σ;

б) если $M \neq S$, то точки S, M и $M' = \sigma(M)$ не коллинеарны;

в) для любой точки M, отличной от S, угол MSM' имеет постоянную величину и постоянную ориентацию.

Преобразование σ называется центрально-подобным вращением.

352. Дана ориентированная плоскость $\overline{P}_2^{\omega}$. Будем говорить, что прямая a' получена из прямой a путем поворота вокруг точки O на величину φ, если существуют лучи h и h', исходящие из точки O и принадлежащие прямым a и a', такие, что угол (h, h') имеет положительную ориентацию и величину φ.

Рассмотрим преобразование $\sigma : [O] \to [O]$, при котором каждой прямой a пучка $[O]$ ставится в соответствие прямая a' того же пучка, которая получена из a путем поворота на постоянную величину φ. Доказать, что σ является проективным преобразованием.

353. На ориентированной плоскости даны две точки O и O' и прямая l, не проходящая через эти точки. Пусть M — переменная точка прямой l, а прямые a и a' получены соответственно из прямых OM и $O'M$ поворотом на постоянную величину φ_0. Определить множество всех точек $X = a \cap a'$.

354. Решить задачу 353, заменив прямую l линией второго порядка L, проходящей через точки O и O'.

355. На ориентированной плоскости даны прямая l и точка O $(O \notin l)$. Пусть a — переменная прямая пучка $[O]$, а прямая a'

получена из a путем поворота вокруг точки $a \cap l$ на постоянную величину φ. Определить множество всех прямых a'.

356. На ориентированной плоскости даны две прямые u и u' и точка O, не принадлежащая им. Пусть a — переменная прямая пучка $[O]$, $a' = \sigma(a)$, где σ — преобразование задачи 352. Определить множество всех прямых AA', где $A = a \cap u$, а $A' = a' \cap u'$.

2. Биссекторы двух прямых

357. Биссекторами двух пересекающихся в точке O прямых a и b называются две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через точку O и гармонически разделяющие пару a, b. Доказать, что каждая пересекающаяся пара прямых имеет одну пару биссекторов.

358. Доказать, что каждый биссектор пары пересекающихся прямых a и b является осью симметрии данных прямых, т. е. при отражении относительно биссектора (см. задачу 337) прямая a преобразуется в прямую b.

359. Доказать, что если две пересекающиеся прямые a и b симметричны относительно прямой p, то прямая p является одним из биссекторов данных прямых.

360. Пусть a — тот из биссекторов прямых $\bar{h}$ и $\bar{l}$, содержащих стороны угла (h, l), который пересекает внутренний по отношению к данному углу отрезок несобственной прямой. Биссектрисой (h, k) называется внутренний луч угла, исходящий из его вершины и принадлежащий биссектору a.

Доказать, что биссектриса угла образует с его сторонами равные углы.

361. Пусть a, b, c, d — различные прямые пучка и $a, b \overset{h}{-} c, d$. Доказать, что если прямые a и b взаимно перпендикулярны, то они содержат биссектрисы углов, образованных прямыми c, d.

362. Доказать, что если две касательные к линии второго порядка перпендикулярны, то полярно сопряженные прямые, проходящие через точку их пересечения, симметричны относительно касательных.

363. Доказать, что если у гиперболы асимптоты ортогональны, то сопряженные диаметры гиперболы симметричны относительно асимптоты.

364. Главной осью линии второго порядка называется диаметр ортогональный сопряженным ему хордам. Доказать:

а) у центральной линии второго порядка либо существуют две и только две взаимно перпендикулярные главные оси, либо каждый диаметр является главной осью;

б) у гиперболы существуют две и только две главные оси, делящие пополам углы между асимптотами;

в) у параболы существует одна главная ось.

365. Доказать:

а) главная ось является осью симметрии линии второго порядка (см. задачу 337);

б) касательные в вершинах линии второго порядка (в точках пересечения главной оси с линией) ортогональны этой оси.

366. Дана овальная линия второго порядка G. Доказать:

а) через каждую точку M плоскости, не принадлежащую этой линии, проходят две взаимно перпендикулярные прямые a и b, которые полярно сопряжены относительно линии G;

б) если точка M — внешняя, то прямые a и b являются биссекторами двух касательных, проведенных из точки M к линии G.

§ 14. Окружности на плоскостях P_2^{ω} и $\overline{P}_2^{\omega}$; длина отрезка

1. Окружность

Окружностью на плоскости P_2^{ω} называется овальная линия второго порядка, индуцирующая на абсолюте p^{ω} инволюцию полярно сопряженных точек (см. задачу 199), совпадающую с абсолютной инволюцией ω.

367. Доказать следующие предложения:

а) окружность не пересекает несобственную прямую, поэтому является частным случаем эллипса;

б) окружность имеет собственный центр, который является ее внутренней точкой;

в) любой диаметр окружности пересекает ее в двух точках.

368. Доказать следующие предложения:

а) через каждую точку M плоскости, отличную от данной точки C, проходит одна и только одна окружность с центром в точке C;

б) на каждом отрезке, как на диаметре, можно построить окружность.

369. Доказать, что инволюция сопряженных диаметров относительно окружности является ортогональной инволюцией.

370. Доказать, что каждый диаметр окружности является осью ее симметрии.

371. Доказать, что для любой точки M поляра m относительно окружности перпендикулярна диаметру, проходящему через эту точку M.

372. Доказать, что касательная к окружности перпендикулярна диаметру, проходящему через точку касания.

373. Доказать, что три прямые, перпендикулярные к сторонам треугольника ABC и проходящие через их середины, пересекаются в одной точке O, причем точки A, B и C принадлежат некоторой окружности с центром в точке O.

374. Доказать, что через три неколлинеарные точки проходит одна и только одна окружность.

375. На окружности даны две фиксированные точки A и B и переменная точка M, причем $M \neq A$ и $M \neq B$. Доказать, что величина φ угла между прямыми MA и MB (см. задачу 348) не зависит от положения точки M. В частности, если $[AB]$ — диаметр окружности, то прямые MA и MB взаимно перпендикулярны.

376. Доказать, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

377. Доказать, что при любом параллельном переносе (см. задачу 257) окружность переходит в окружность.

378. Две окружности называются конгруэнтными, если существует такой параллельный перенос, при котором одна окружность переходит в другую. Доказать:

а) какова бы ни была окружность α с центром в точке O, всегда существует конгруэнтная ей окружность с центром в любой точке C плоскости;

б) конгруэнтность окружностей удовлетворяет условиям транзитивности, симметричности и рефлексивности.

379. Доказать, что при любом преобразовании подобия окружность переходит в окружность.

380. Доказать, что при преобразованиях подобия конгруэнтные окружности переходят в конгруэнтные окружности.

381. Если на прямой l плоскости $\overline{P}_2^{\omega}$ задана инволюция, то образ C несобственной точки этой прямой называется центром инволюции.

Пусть (A, A') и (B, B') — две пары соответственных точек эллиптической инволюции $\sigma : (l) \to (l)$. На отрезках AA' и BB', как на диаметрах, построены окружности. Доказать, что эти окружности пересекаются в двух точках S и S' и прямая SS' (радикальная ось окружностей) проходит через точку C и перпендикулярна линии центров окружностей.

382. На проективной плоскости P_2 даны два абсолюта p^{ω_1} и q^{ω_2}. Доказать, что существуют гиперболические гомологии, переводящие абсолют p^{ω_1} в абсолют q^{ω_2}. Центры этих гомологий называются точками Лагерра [1].

383. Доказать, что если на проективной плоскости даны два абсолюта p^{ω_1} и q^{ω_2}, то любой угол с вершиной в точке Лагерра (см. задачу 382) имеет одну и ту же величину по отношению к метрикам, определяемым данными абсолютами.

384. Дана окружность, касательная l к ней и отрезок PQ, параллельный прямой l. Треугольник XYZ с переменными вершинами описан около данной окружности так, что направленный отрезок XY принадлежит прямой l и конгруэнтен направленному отрезку PQ. Определить множество всех точек Z.

385. На ориентированной плоскости дана окружность α и точка S ($S \in \alpha$). Пусть M — переменная точка окружности α, а a' — прямая, полученная из прямой SM путем поворота вокруг точки S на постоянную величину (см. задачу 352). Определить множество всех прямых MM', где M' — вторая точка пересечения прямой a' с окружностью α.

---

[1] Задача 382 по существу утверждает, что две любые проективные модели евклидовой геометрии проективно эквивалентны.

2. Длина отрезка

Рассмотрим фиксированную окружность ε_0 с центром в точке O. Согласно задаче 378 а), какова бы ни была точка A, существует окружность ε_A с центром в точке A, конгруэнтная окружности ε_0. Окружность ε_A будем называть единичной окружностью с центром в точке A. *Расстоянием* от точки A до B называется число $|AB| = (BEAN_\infty)$, где N_∞ — несобственная точка прямой AB, а E — точка пересечения луча AB с окружностью ε_A (см. задачу 252). Так как $|AB| = |BA|$ (см. задачу 388), то число $|AB|$ называется также расстоянием между точками A и B. *Длиной отрезка* называется расстояние между его концами.

386. Доказать следующие предложения:

а) длина любого отрезка является положительным числом;

б) если при параллельном переносе отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$, то $|AB| = |A'B'|$.

387. Доказать, что для произвольной окружности α расстояние от центра O до любой ее точки постоянно. Это постоянное число называется радиусом окружности. Убедиться в том, что радиус единичной окружности равен единице.

388. Доказать, что для любых точек A и B $|AB| = |BA|$.

389. Доказать, что если окружности α_1 и α_2 концентрические и имеют один и тот же радиус, то они совпадают.

390. Доказать, что у конгруэнтных окружностей (см. задачу 378) радиусы равны.

391. Доказать, что при преобразовании подобия все единичные окружности перейдут в окружности с равными радиусами.

392. Доказать, что при преобразовании подобия:

а) концентрические окружности переходят в концентрические;

б) отношение радиусов концентрических окружностей сохраняется.

393. Доказать, что при любом преобразовании подобия π отношение длин соответственных отрезков постоянно.

§ 15*. Фокусы линий второго порядка

Фокусом овальной линии второго порядка Γ, отличной от окружности, на плоскости $\overline{P}_2^\omega$ называется любая неподвижная точка фокальной инволюции (см. задачу 394). Эллипс и гипербола на $\overline{P}_2^\omega$ имеют два собственных фокуса (задача 397), парабола — один собственный и один несобственный фокус. Другими словами, на плоскости $\overline{P}_2^\omega$ эллипс и гипербола имеют два, а парабола один фокус.

1*. Общая теория; фокусы центральных линий второго порядка

Во всех задачах пункта, за исключением задач 396 и 403, предполагается, что данные линии второго порядка отличны от окружности.

394. На плоскости P_2^ω дана овальная линия второго порядка Γ, отличная от окружности, и одна из ее осей u. Рассмотрим отображение $\sigma : (u) \to (u)$, при котором каждой точке M прямой u поставлена в соответствие точка M' так, что если M — центр линии Γ, то M' — несобственная точка прямой u; если M — несобственная точка прямой u, то M' — центр линии Γ; если, наконец, M отлична от центра и несобственной точки прямой u, то $M' = l' \cap u$, где l' — прямая, полярно сопряженная и ортогональная прямой l, проходящей через точку M и параллельной некоторой фиксированной прямой n. Доказать, что:

а) отображение σ не зависит от выбора прямой n;

б) отображение σ является инволюцией.

Инволюцию σ будем называть *фокальной инволюцией линии* Γ на оси u.

395. Доказать, что, для того чтобы собственная точка F была фокусом овальной линии второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы любые две полярно сопряженные прямые, через нее проходящие, были ортогональны [1].

396. Доказать, что для окружности единственной точкой, для которой любые две полярно сопряженные прямые, через нее проходящие, ортогональны, является ее центр [2].

397. Доказать, что каждая овальн я линия второго порядка имеет два и только два фокуса, принадлежащих одной из ее осей, причем:

а) эллипс и гипербола имеют два собственных фокуса;

б) парабола имеет один собственный, другой несобственный фокус.

398. Поляра фокуса F линии второго порядка называется директрисой f. Доказать, что собственные директрисы перпендикулярны оси, на которой лежат соответствующие фокусы.

399. Доказать, что в плоскости P_2^ω отрезок MN любой касательной между двумя касательными t_A, t_B, проведенными в концах хорды AB, проходящей через собственный фокус F линии второго порядка Γ, виден из этого фокуса под прямым углом.

400. Доказать, что фокальный радиус FP любой внешней точки P линии второго порядка $\overline{\Gamma}$ принадлежит биссектору двух прямых, соединяющих тот же фокус F с точками касания A и B касательных, проведенных из этой внешней точки P.

401. Доказать, что касательная t_M в любой собственной точке M линии второго порядка Γ равнонаклонена к фокальным радиусам F_1M и F_2M этой точки M.

402. Доказать:

а) полярно сопряженные и ортогональные прямые q_1 и q_2, проходящие через любую собственную точку P овальной линии второго по-

---

[1] В учебной литературе этот критерий обычно принимают за определение фокуса линии второго порядка плоскости $\overline{P}_2^\omega$.

[2] В соответствии с этим свойством и задачей 395 центр окружности называется ее фокусом.

рядка (задача 366), являются биссекторами прямых F_1P и F_2P, где F_1 и F_2 — фокусы овальной линии;

б) фокальные радиусы F_1P и F_2P любой внешней точки P относительно линии второго порядка образуют конгруэнтные углы с касательными, проведенными из точки P.

403. Доказать, что в полярном соответствии π относительно окружности α с центром в точке O всякая окружность α_1 с центром в точке O_1 переходит в пучок прямых второго порядка. Точки соприкосновения пучка образуют линию второго порядка, для которой точка O служит фокусом, образ центра O_1 — директрисой, соответствующей этому фокусу, а прямая OO_1 — осью.

2*. Фокальная теория параболы

404. Доказать, что собственный фокус F параболы и точка Q пересечения собственной директрисы с осью симметричны относительно вершины A параболы.

405. Доказать, что касательная к параболе $\overline{\Gamma}$ в точке M является биссектором двух прямых — прямой FM и диаметра d_M, проходящего через точку M. Здесь F — фокус параболы.

406. Доказать, что касательные, проведенные из любой внешней точки P к параболе, образуют равные углы с фокальным радиусом и диаметром, проходящими через эту точку.

407. Доказать, что касательные t_A и t_B параболы $\overline{\Gamma}$, проведенные в концах хорды AB, проходящей через фокус F, ортогональны.

408. Доказать, что если касательные t_A и t_B в точках A и B параболы $\overline{\Gamma}$ ортогональны, то прямая AB проходит через ее собственный фокус F.

409. Доказать, что если две касательные к параболе $\overline{\Gamma}$ ортогональны, то точка их пересечения P принадлежит директрисе f, и обратно: касательные, проведенные к параболе из любой точки P директрисы, ортогональны.

410. Найти множество точек — оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы $\overline{\Gamma}$ на касательные к ней.

411. Найти множество точек — вершин ориентированных углов (h, l), конгруэнтных (задача 340) данному углу (h_0, l_0) и для которых первый луч h проходит через собственный фокус F параболы $\overline{\Gamma}$, а второй l принадлежит касательной к ней.

412. Доказать, что точка пересечения K любых касательных t_1 и t_2 к параболе $\overline{\Gamma}$ является центром окружности, описанной около треугольника, образованного директрисой f и двумя перпендикулярами n_1, n_2 к этим касательным, проведенным из фокуса F.

413. Доказать, что точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника, образованного касательными к параболе $\overline{\Gamma}$, лежит на директрисе.

§ 16. Движения с проективной точки зрения

Движением плоскости $\overline{P}_2^{\omega}$ называется такое преобразование подобия, которое по крайней мере одну окружность переводит в окружность, конгруэнтную своему прообразу (см. задачу 378).

Частным случаем движений являются ортогональные преобразования. Ортогональным преобразованием точек плоскости $\overline{P}_2^{\omega}$ будем называть преобразование, которое индуцируется аффинной коллинеацией, оставляющей инвариантной хотя бы одну окружность. Центр любой инвариантной окружности называется центром ортогонального преобразования.

414. Доказать, что любой центр ортогонального преобразования является неподвижной точкой.

415. Доказать, что ортогональное преобразование является преобразованием подобия.

416. Доказать, что ортогональное преобразование сохраняет всякую окружность, концентрическую к инвариантной окружности.

417. Доказать, что всякое ортогональное преобразование любую окружность α_0 переводит в конгруэнтную ей окружность α_0'.

418. Доказать, что любое отражение относительно прямой w является ортогональным преобразованием.

419. Доказать, что движениями являются:

а) параллельные переносы;

б) ортогональные преобразования;

в) отражения.

420. Доказать, что всякое движение является произведением ортогонального преобразования на параллельный перенос.

421. Доказать, что всякое движение любую окружность переводит в конгруэнтную окружность.

422. Доказать, что движение является подобным преобразованием.

423. Доказать, что при движении сохраняется расстояние между любыми двумя точками.

424. Дана коллинеация плоскости $\overline{P}_2^{\omega}$ в себя, при котором если $M' = \sigma(M)$ и $N' = \sigma(N)$, то $|M'N'| = |MN|$. Доказать, что σ является движением.

§ 17*. Приложение проективной геометрии к задачам на построение в евклидовой плоскости, выполняемые различными средствами

В этом параграфе представлены задачи на построение в евклидовой плоскости, выполняемые различными средствами, при решении которых применяются методы проективной геометрии. Речь идет о геометрических построениях, выполняемых при помощи линейки, если на плоскости дана построенная окружность с центром или квадрат. Совершенно аналогично могут быть решены задачи на построение, выполняемые при помощи линейки с параллельными краями и угольника, т. е. инструмента, позволяющего строить перпендикулярные прямые.

Методы проективной геометрии позволяют указать единый путь решения этих задач. В самом деле, если каждую задачу указанных выше типов сформулировать в терминах проективной геометрии, рассматривая евклидову плоскость как модель $\overline{P}_2^{\omega}$ проективной плоскости (см. введение к настоящей главе), то задача сведется к некоторой задаче на построение в плоскости P_2^{ω} с использованием точек абсолюта и абсолютной инволюции. После того как задача решена на плоскости P_2^{ω}, следует снова вернуться к евклидовой формулировке задачи и дать обычное толкование построения в терминах евклидовой геометрии.

При этом, однако, следует иметь в виду следующее весьма важное обстоятельство. При решении соответствующей задачи на проективной плоскости P_2^{ω} мы можем пользоваться абсолютом p^{ω}, рассматривая его как множество точек прямой с заданной на ней инволюцией. Однако при окончательном толковании построения на евклидовой плоскости $\overline{P}_2^{\omega}$ точки абсолюта должны быть исключены из рассмотрения, т. е. эти точки следует считать недоступными. Это ограничение существенно, так как в противном случае соответствующий шаг построения невозможно истолковать с точки зрения евклидовой геометрии.

Для того чтобы помочь учащемуся лучше усвоить изложенную выше схему, в пункте 1* представлены вспомогательные задачи на построение, выполняемые на проективной плоскости P_2^{ω}.

1*. Задачи на построение в плоскости P_2^{ω}

Во всех задачах этого пункта предполагается, что данные объекты принадлежат плоскости $\overline{P}_2^{\omega}$, а построения выполняются на плоскости P_2^{ω} одной линейкой. При формулировке задач мы пользуемся обычной терминологией евклидовой геометрии. Важно, однако, подчеркнуть, что при выполнении построений на плоскости P_2^{ω} разрешается пользоваться абсолютом p^{ω}, т. е. точками абсолюта и соответствующими точками абсолютной инволюции ω.

425. Даны точка A и прямая a. Построить прямую x так, чтобы: а) $A \in x$, $a \parallel x$; б) $A \in x$, $a \perp x$.

426. Даны отрезок AB и некоторая точка M. Построить точку X так, чтобы отрезок MX был конгруэнтен и параллелен отрезку AB.

427. Даны центр C и радиус r окружности α, точки которой не считаются построенными. Построить несколько точек окружности.

428. Даны прямая l и две точки A и O, причем $A \in l$, а $O \notin l$. Построить точки пересечения прямой l с окружностью α с центром в точке O и радиусом $[OA]$ в предположении, что точки окружности α не являются построенными.

429. Даны пересекающиеся прямые a и b. Построить прямую x так, чтобы прямая a была одним из биссекторов прямых b и x.

430. Построить прямую x, проходящую через данную точку A прямой a, так, чтобы величина угла между прямыми a и x была равна величине данного угла (h, k).

431. Построить несколько точек параболы, если даны вершина, какой-либо диаметр и одна точка, отличная от вершины.

432. Построить оси овальной линии второго порядка Γ в предположении, что все точки линии являются построенными.

433. Построить фокусы и директрисы овальной линии второго порядка в предположении, что все точки линии являются построенными.

2*. Геометрические построения одной линейкой (на плоскости дана вспомогательная фигура)

В данном пункте представлены задачи на построение, которые выполняются одной линейкой, если на евклидовой плоскости построены квадрат K^* или фигура Ω^*, состоящая из построенной окружности с построенным центром.

434. Построить прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой, если на плоскости дана Ω^*.

435. Построить прямую, проходящую через данную точку и ортогональную данной прямой l, если на плоскости дана Ω^*.

436. Выполнить построение задачи 435, если на плоскости дан K^*.

437. Выполнить построение задачи 426, если:

а) на плоскости дана Ω^*;

б) на плоскости дан K^*.

438. Выполнить построения задачи 427, если:

а) на плоскости дана Ω^*;

б) на плоскости дан K^*.

439. Даны центр O и радиус r окружности α, точки которой не считаются построенными. Построить точки пересечения окружности α с данной прямой, если дана Ω^*.

440. Две окружности α_1 и α_2, точки которых не считаются построенными, заданы соответственно центрами O_1, O_2 и радиусами r_1, r_2. Построить точки пересечения окружностей α_1 и α_2, если дана Ω^*.

441. Даны две пересекающиеся прямые a и b. Построить биссекторы данных прямых, если на плоскости дана Ω^*.

442. Дан угол (h, k). Построить биссектрису этого угла, если на плоскости дана Ω^*.

443. Построить квадрат, для которого данный отрезок AB является стороной, если дана Ω^*.

444. Доказать теорему Понселе—Штейнера: если на плоскости дана Ω^*, то любое построение, выполняемое циркулем и линейкой, может быть выполнено одной линейкой.

Раздел второй

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ. МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Глава V

МЕТОДЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

В этой главе приведены задачи на построение циркулем и линейкой в евклидовой плоскости. Тема «Основные задачи на построение в школьном курсе геометрии» в этой главе не отражена, так как предполагается, что студенты, прежде чем приступить к решению задач этой главы, повторяют основные построения, известные из курса средней школы.

§ 18. Простейшие построения

445. Даны два отрезка p, q и угол φ. Построить такой треугольник ABC, чтобы $h_a \cong p$, $b_A \cong q$, $\angle A \cong \varphi$.

446. Построить треугольник ABC, если даны высота BH и радиусы окружностей, описанных около треугольников ABH и CBH.

447. Построить прямую, проходящую через точку A и пересекающую данную окружность в точках P и Q, так, чтобы $[AP] \cong [PQ]$.

448. Даны три неколлинеарные точки A, B и C. Построить окружности с конгруэнтными радиусами и центрами в точках A и B так, чтобы их общая касательная проходила через точку C.

449. Даны две точки и окружность. Провести через данные точки две различные параллельные прямые так, чтобы данная окружность отсекала на них две конгруэнтные хорды.

450. Дан прямоугольный треугольник. Построить окружность с центром, принадлежащим одному из катетов, так, чтобы она проходила через вершину прямого угла и касалась гипотенузы.

451. Построить ромб, зная его диагональ и радиус вписанной окружности.

452. На стороне угла с вершиной A дана точка M. Построить на другой стороне точку X так, чтобы $\angle AMX \cong 3 \angle AXM$.

453. Построить квадрат $ABCD$ так, чтобы точки A и B принадлежали данной окружности, а C и D — данной прямой.

454. Дан треугольник ABC и отрезок p. Построить такую прямую x, параллельную стороне BC, чтобы $[BX] + [YC] \cong p$, где $X = x \cap [AB]$, $Y = x \cap [AC]$.

455. Дан треугольник ABC. Построить такую прямую x, параллельную стороне BC, чтобы $[AX] \cong [YC]$, где $X = x \cap [AB]$, $Y = x \cap [AC]$.

456. Вписать в данную окружность треугольник ABC так, чтобы прямые, содержащие биссектрису, медиану и высоту, проведенные из одной вершины, проходили соответственно через данные точки B_1, M и H окружности.

457. Построить треугольник ABC, если углы A и B конгруэнтны данным углам, а разность сторон AC и BC конгруэнтна данному отрезку.

458. Построить параллелограмм так, чтобы его сторона и две высоты были конгруэнтны данным отрезкам a, b и c.

459. Даны две различные параллельные прямые и точка A. Построить окружность, проходящую через точку A и касающуюся данных прямых.

460. Даны отрезки m, n и угол φ. Построить треугольник ABC так, чтобы $\angle A \cong \varphi$, $m \cong [OB]$, $n \cong [OC]$, где O — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$.

461. Построить окружность, касающуюся данной окружности и прямой g в данной точке A.

462. Построить окружность, касающуюся данной окружности в данной на ней точке A и данной прямой.

463. Построить окружность, касающуюся двух данных окружностей, причем одной из них в данной точке.

464. Дана окружность (O, r) и три ее различные точки A, B и C. В окружность (O, r) вписать треугольник так, чтобы точки A, B и C принадлежали прямым, содержащим биссектрисы треугольника.

465. Даны окружность и три ее различные точки A, B и C. В окружность вписать треугольник так, чтобы точки A, B и C принадлежали прямым, содержащим высоты треугольника.

§ 19. Применение свойств некоторых множеств точек к решению задач на построение

466. Дана окружность (O, r), ее внутренняя точка P и хорда AB. Построить хорду XY так, чтобы она проходила через точку P, а ее середина принадлежала хорде AB.

467. Построить параллелограмм, две смежные вершины которого — данные точки, а две другие принадлежат данной окружности.

468. Провести окружность, пересекающую три данные окружности (O_1, r), (O_2, r), (O_3, r) по хордам, конгруэнтным данному отрезку.

469. Построить окружность данного радиуса, проходящую через данную точку A, так, чтобы эта окружность из другой данной точки B была видна под данным углом φ.

470. Даны две окружности (O_1, r_1) и (O_2, r_2) и их общая внешняя касательная. Построить на этой касательной точку X так, чтобы сумма углов, под которыми видны данные окружности из этой точки, была конгруэнтна данному углу φ.

471. Построить окружность, проходящую через две данные точки и пересекающую данную окружность в двух точках A и B так, чтобы (AB) была параллельна данной прямой.

472. Даны две точки A и B, принадлежащие данной окружности (O, r), и отрезок m. Построить точку X, удовлетворяющую условиям: $X \in (O, r)$, $[AX] - [BX] \cong m$.

473. Построить параллелограмм, зная одну сторону, высоту и угол между диагоналями.

474. В данную окружность вписать прямоугольник так, чтобы прямые, содержащие две его стороны (смежные или противоположные), проходили через две данные точки.

475. В данную окружность вписать прямоугольный треугольник, зная острый угол и точку, через которую проходит прямая, содержащая один из катетов.

476. Даны окружность, угол φ и две точки A и B. В окружность вписать треугольник XYZ так, чтобы $\angle XYZ \cong \varphi$, $A \in (XY)$ и $B \in (YZ)$.

477. Даны окружность, угол φ и две точки A и B. В окружность вписать треугольник XYZ так, чтобы $\angle XYZ \cong \varphi$, $A \in (XY)$, $B \in (XZ)$.

478. Построить окружность с центром в данной точке, пересекающую данную окружность под данным углом.

479. Даны окружность (O, r), точка A $(|OA| < r)$ и отрезок p. Построить хорду XY, содержащую точку A, так, чтобы $[XA] - [YA] \cong p$.

480. Через данные точки A и B провести две прямые, пересекающиеся под углом φ, так, чтобы данная окружность (O, r) отсекала на них конгруэнтные хорды.

481. Построить к данной окружности касательную так, чтобы отрезок ее между двумя другими данными концентрическими окружностями был конгруэнтен данному отрезку.

482. Через две данные точки окружности провести две параллельные хорды так, чтобы сумма их была конгруэнтна данному отрезку.

483. Построить хорду данной окружности, конгруэнтную данному отрезку, так, чтобы данная прямая l делила эту хорду в данном отношении.

484. Построить окружность, проходящую через две данные точки A и B и пересекающуюся с данной окружностью (O, r) в двух диаметрально противоположных точках.

485. Построить окружность, ортогональную к трем данным окружностям.

486. Даны неколлинеарные точки A, B, C и два отрезка m и n. Построить окружность, проходящую через точку A, так, чтобы точки B и C были серединами хорд этой окружности, конгруэнтных соответственно отрезкам m и n.

487. Даны два отрезка MN и PQ. На данной прямой l найти такую точку X, чтобы треугольники MXN и PXQ были равновелики.

488. Построить квадрат $X_1X_2X_3X_4$ так, что данные точки A, B, C и D — внутренние точки сторон X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4 и X_4X_1.

489. Даны две точки A и B и две различные параллельные прямые. Через точку A провести прямую так, чтобы отрезок ее между параллельными прямыми делился основанием перпендикуляра, опущенного из точки B на искомую прямую, в данном отношении.

490. На прямой даны три точки A, B, C. Построить на данной окружности точку X так, чтобы $\angle AXC \cong 2 \angle AXB$.

491. Найти точку, если известно, что отрезки касательных, проведенных через эту точку к двум данным окружностям, конгруэнтны и одна из окружностей видна из этой точки под данным углом.

§ 20. Задачи на построение треугольников по различным элементам

В каждой из задач этого параграфа требуется построить треугольник ABC, если даны отрезки и углы, указанные в условиях задачи. При этом если, например, даны «a, $\angle A$, m_a» (см. задачу 493), то точный смысл задачи заключается в следующем: «Даны два отрезка p и q и угол φ. Построить треугольник ABC так, чтобы $a \cong p$, $\angle A \cong \varphi$, $m_a \cong q$».

В каждой из следующих задач построить треугольник, если даны:

492. Вершины A и B, $\angle C$ и точка D пересечения основания с биссектрисой внутреннего угла при вершине C.

493. a, $\angle A$, m_a.

494. a, $\angle A$, h_b.

495. $\angle A$, h_c, $2p$.

496. $\angle A$, h_b, m_a.

497. $\angle A$, a, m_b.

498. $\angle A$, a, r.

499. $\angle A$, r, R.

500. a, h_a и отрезок p, удовлетворяющий условию $|b|^2 - |c|^2 = |p|^2$.

501. a, h_a и отрезок q, удовлетворяющий условию $|b|^2 + |c|^2 = |q|^2$.

502. $\angle A$, a и отрезок q, удовлетворяющий условию $|b|^2 + |c|^2 = |q|^2$.

503. a, m_a и отрезок p, удовлетворяющий условию $|b|^2 - |c|^2 = |p|^2$.

504. $\angle A$, a и отрезок p, удовлетворяющий условию $|b|^2 - |c|^2 = |p|^2$.

505. $\angle A$, a и два отрезка m и n, удовлетворяющих условию $|b| : |c| = |m| : |n|$.

506. a, h_a и два отрезка m и n, удовлетворяющих условию $|b| : |c| = |m| : |n|$.

507. a, m_a и два отрезка m и n, удовлетворяющих условию $|b| : |c| = |m| : |n|$.

508. b_A и отрезки m и n, удовлетворяющие условиям: $[AD] \cong m$ и $[DC] \cong n$ (D — точка пересечения биссектрисы угла B с прямой AC).

509. Вершины B, C и точки пересечения прямой BC с биссектрисой и высотой, проведенной из вершины A.

510. Вершины B, C, h_a и точка D пересечения стороны BC с биссектрисой угла A.

511. $\angle A$, R и отрезок q, удовлетворяющий условию $|b|^2 - |c|^2 = |q|^2$.

512. $\angle A$, R и отрезок q, удовлетворяющий условию $|b|^2 + |c|^2 = |q|^2$.

513. a, h_a и два отрезка m и n, удовлетворяющих условию $h_b| : |h_c| = |m| : |n|$.

§ 21. Геометрические построения с применением свойств параллельного переноса, поворота и симметрии

514. Построить трапецию по четырем сторонам.

515. Построить трапецию по разности оснований, двум боковым сторонам и одной диагонали.

516. Построить трапецию по диагоналям и двум параллельным сторонам.

517. Построить треугольник, если даны три его медианы.

518. Построить трапецию, зная основание, угол между диагоналями, высоту и среднюю линию.

519. Построить четырехугольник, зная три стороны и углы, прилежащие к четвертой стороне.

520. Построить четырехугольник по сторонам и углу между одной парой противоположных сторон.

521. Построить четырехугольник по диагоналям, углу между ними и двум сторонам.

522. Построить четырехугольник, зная его диагонали, две противоположные стороны и угол между этими сторонами.

523. Построить отрезок, конгруэнтный и параллельный данному, так, чтобы один его конец принадлежал данной прямой, а другой — данной окружности.

524. Построить отрезок, конгруэнтный и параллельный данному, концы которого лежали бы на двух данных окружностях.

525. Построить четырехугольник, зная три его угла и две противоположные стороны.

526. Построить прямую, проходящую через данную точку, так, чтобы сумма (или разность) отрезков перпендикуляров, опущенных из двух других данных точек на эту прямую, была конгруэнтна данному отрезку.

527. Даны две точки A и B, расположенные по одну сторону от данной прямой l, и отрезок m. На прямой l построить точки X и Y так, чтобы $[XY] \cong m$, а длина ломаной $AXYB$ была наименьшей.

528. Даны две различные параллельные прямые l_1, l_2, две точки A и B, лежащие вне полосы, ограниченной этими прямыми, по разные

стороны от нее, и прямая l, не параллельная l_1 и l_2. На прямых l_1 и l_2 построить соответственно точки C и D так, чтобы отрезок CD был параллелен прямой l, а длина ломаной $ACDB$ была наименьшей.

529. Даны хорды AB и CD окружности. Построить точку X окружности так, чтобы хорды AX и BX высекали на хорде CD отрезок EF, конгруэнтный данному отрезку m.

530. Через данную точку A провести прямую так, чтобы ее точки пересечения с двумя данными окружностями (O_1, r_1) и (O_2, r_2) определяли конгруэнтные хорды.

531. Построить равносторонний треугольник так, чтобы одна вершина принадлежала данной окружности, другая — данной прямой, а третья вершина совпала с данной точкой A.

532. Даны две окружности и прямая l. Построить равносторонний треугольник так, чтобы две его вершины принадлежали данным окружностям, а высота, проведенная через третью вершину, принадлежала прямой l.

533. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник так, чтобы вершины острых углов принадлежали двум данным окружностям, а вершина прямого угла совпала с данной точкой.

534. Построить окружность с центром в данной точке O так, чтобы одна из ее дуг, концы которой лежат на двух окружностях (O_1, r_1), (O_2, r_2), была видна из точки O под данным углом.

535. Построить квадрат, если даны его центр и две точки, лежащие на прямых, содержащих две параллельные стороны квадрата.

536. Даны две окружности (O_1, r_1) и (O_2, r_2) и точка A. Построить точки X и Y так, чтобы $X \in (O_1, r_1)$, $Y \in (O_2, r_2)$, а точка A — середина отрезка XY.

537. Различные прямые l_1, l_2 и l_3 параллельны между собой, а прямая l не параллельна им. Построить равносторонний треугольник так, чтобы вершины его лежали на прямых l_1, l_2, l_3, а центр — на прямой l.

538. Даны квадрат $ABCD$ и точка E, принадлежащая стороне AB. На сторонах квадрата построить точки X и Y так, чтобы треугольник EXY был равносторонним.

539. Построить точку X так, чтобы какие-либо две касательные, проведенные из этой точки к данным окружностям (O_1, r_1) и (O_2, r_2), образовали угол, конгруэнтный данному углу φ, и, кроме того, отрезок одной из касательных к окружности (O_1, r_1), заключенный между X и точкой касания, был конгруэнтен данному отрезку p.

540. Даны хорды AB и CD окружности и точка E, принадлежащая хорде CD. Построить такую точку X окружности, чтобы хорды AX и BX высекали на хорде CD отрезок MN, делящийся в точке E пополам.

541. Даны отрезок a, угол φ, две концентрические окружности (O_1, r_1), (O_2, r_2) и точка B, отличная от точки O. Построить точки X и Y так, чтобы $X \in (O_1, r_1)$, $Y \in (O_2, r_2)$, $[XY] \cong a$ и $\angle XBY \cong \varphi$.

542. Даны две концентрические окружности с центром в точке O. Построить луч с началом в точке O так, чтобы отрезок, заключенный между точками пересечения этого луча с окружностями, был виден из данной точки под данным углом.

543. На данной прямой l построить точку X так, чтобы:

а) сумма $|AX| + |BX|$, где A и B — данные точки, не лежащие на прямой l, была наименьшей;

б) разность $|AX| - |BX|$ была наибольшей.

544. Прямая l пересекает отрезок AB. Построить на этой прямой такую точку X, чтобы биссектриса угла AXB принадлежала прямой l.

545. Построить треугольник ABC наименьшего периметра, если даны сторона a и высота h_a.

546. Даны точки M и N и две другие точки A и B, лежащие по одну сторону от прямой MN. На (MN) построить точку X так, чтобы $\angle MXA \cong \angle NXB$.

547. Даны различные точки M, N, A, B, причем $M \notin (AB)$, $N \notin (AB)$. На прямой AB построить такую точку X, чтобы $\angle AXN \cong 2\angle MXB$.

548. Даны различные точки A, B, C, D и угол φ. На прямой CD найти такую точку X, чтобы разность углов AXC и BXD была конгруэнтна углу φ.

549. Построить равнобедренный треугольник, основание которого лежит на стороне OA данного угла AOB, вершина M принадлежит $[OB)$, а боковые стороны проходят через две данные внутренние точки P и Q угла.

550. На данной прямой построить точку X так, чтобы прямая была одной из биссектрис двух различных касательных, проведенных из точки X к данным окружностям (O_1, r_1) и (O_2, r_2).

551. Даны прямая l, две окружности и отрезок p. Построить ромб так, чтобы его диагональ принадлежала прямой l и была конгруэнтна отрезку p, а две вершины, не принадлежащие прямой l, лежали соответственно на данных окружностях.

552. Построить треугольник ABC, если даны стороны b, c и угол φ, удовлетворяющий условию $\angle B - \angle C \cong \varphi$.

§ 22. Геометрические построения, выполняемые с применением свойств преобразований подобия

553. В данный сектор AOB вписать квадрат так, чтобы две его смежные вершины принадлежали дуге сектора, а две другие вершины — соответственно радиусам OA и OB.

554. Даны три отрезка a, p и q. Построить ромб, стороны которого конгруэнтны отрезку a, а отношение диагоналей равно $|p| : |q|$.

555. Даны отрезки a, m и n, где $|m| < |n|$. Построить прямоугольник $ABCD$ так, чтобы $[AB] \cong a$; $|BC| : |AC| = |m| : |n|$.

556. Даны отрезки a, m, n и угол φ. Построить параллелограмм $ABCD$ так, чтобы $[AD] \cong a$, $|AC| : |BD| = |m| : |n|$ и $\angle AOD \cong \varphi$ (O — центр параллелограмма).

557. Даны четыре отрезка a, b, m, n и угол φ. Построить трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC так, чтобы $[AB] \cong a$, $[BC] \cong b$, $\angle ABC \cong \varphi$ и $|CD| : |DA| = |m| : |n|$.

558. В данный треугольник вписать ромб с данным острым углом так, чтобы две его вершины лежали на одной стороне, а две другие — соответственно на двух других сторонах.

559. В данный треугольник вписать прямоугольник, подобный данному.

560. На сторонах AB и BC треугольника ABC построить точки D и E так, чтобы стороны AD, DE и EC четырехугольника $ADEC$ были попарно конгруэнтны.

В каждой из задач 561—568 требуется построить треугольник ABC, если даны отрезки и углы, указанные в условиях задачи. При этом мы пользуемся обозначениями, введенными в § 20.

561. $\angle A$, $\angle B$ и отрезок q, удовлетворяющий условию: $q \cong a + h_a$.

562. $\angle B$ и три отрезка p, m и n, удовлетворяющих условиям: $|m|:|n| = |c|:|b|$, $p = a - h_a$.

563. $\angle A$, $\angle B$, r.

564. $\angle A$, $\angle B$ и отрезок p, удовлетворяющий условию $p = m_a + h_c + b_c$.

565. Отрезки m, n, p и q, удовлетворяющие условиям: $|m|:|n|:|p| = |a|:|b|:|c|$, $q \cong m_a + h_a + b_a$.

566. $\angle B$, h_b и отрезки p и q, удовлетворяющие условию: $|BH|:|HC| = |p|:|q|$ (H — проекция точки A на прямую BC).

567. $\angle A$, R и угол φ, заключенный между h_a и m_a.

568. $\angle B$ и два отрезка p и q, удовлетворяющих условиям: $a + b \cong p$, $b + c \cong q$.

569. Даны окружность и точка A, ей принадлежащая. Построить точки X и Y окружности так, чтобы треугольник AXY был подобен данному треугольнику $A_0B_0C_0$.

570. Через данную точку A, внешнюю по отношению к данной окружности, провести прямую, пересекающую окружность в точках X и Y, удовлетворяющих условию: $[AX] \cong 2[XY]$ (X лежит между A и Y).

571. Даны прямые l_1, l_2 и точка A. Построить точку X, принадлежащую прямой l_2 и равноудаленную от прямой l_1 и точки A.

572. Даны две прямые l_1 и l_2, точка A ($A \notin l_1$, $A \notin l_2$) и два отрезка m и n. Построить такую прямую x, проходящую через точку A, что $|AM|:|AN| = m:n$ ($M = l_1 \cap x$, $N = l_2 \cap x$).

573. Построить окружность, проходящую через данные точки A, B и пересекающую данные различные параллельные прямые в точках X и Y, удовлетворяющих условию: $[AX] \cong [XY]$.

574. Даны точка A, три различные прямые, проходящие через точку B и отрезки m, n. Построить прямую, проходящую через точку A, так, чтобы отрезки этой прямой, заключенные между данными прямыми, находились в отношении $|m|:|n|$.

575. Даны три концентрические окружности. Построить секущую так, чтобы $[XY] \cong [YZ]$, где X, Y и Z — три точки пересечения секущей с каждой из данных окружностей.

576. Даны две прямые и окружность. Построить окружность, касающуюся двух данных прямых и данной окружности.

577. Даны две окружности (O_1, r_1), (O_2, r_2) и точки A и B ($A \in (O_1, r_1)$, $B \in (O_2, r_2)$). Построить две конгруэнтные окружности так, чтобы они касались друг друга и соответственно окружностей (O_1, r_1), (O_2, r_2) в точках A и B.

578. Построить окружность, проходящую через данную точку A и касающуюся данной прямой и данной окружности.

579. Построить окружность, касающуюся данной прямой и двух данных окружностей.

580. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей.

581. Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей (задача Аполлония).

§ 23. Геометрические построения с применением свойств инверсии. Задача Аполлония

582. Дан квадрат, одна вершина которого совпадает с центром инверсии, а противоположная вершина лежит на окружности инверсии. Построить фигуру, ему инверсную.

583. Дан квадрат, две вершины которого лежат на окружности инверсии, а третья — в центре инверсии. Построить фигуру, ему инверсную.

584. В окружность вписать треугольник ABC. Приняв эту окружность за окружность инверсии, построить фигуру, инверсную вписанному треугольнику.

585. Даны две окружности, касающиеся друг друга в точке A. Приняв точку A за полюс инверсии, построить фигуру, инверсную двум окружностям.

586. Даны три окружности, имеющие общую точку A. Построить окружность, касающуюся трех данных.

587. Построить окружность, проходящую через две данные точки и ортогональную данной окружности.

588. Через данную точку A провести окружность, ортогональную двум данным окружностям.

589. Через данную точку K провести прямую так, чтобы точки L_1 и L_2 ее пересечения с прямыми l_1, l_2 удовлетворяли условию $|KL_1| \times |KL_2| = |m|^2$, где m — данный отрезок.

590. Через данную точку K провести прямую, пересекающую данную окружность в точках A и B, таких, что $|KA| \cdot |KB| = |m|^2$, где m — данный отрезок.

591. Решить задачу 461 методом инверсии.

592. Построить окружность, касающуюся двух данных окружностей, причем одной из них в данной точке A.

593. Построить окружность, проходящую через данные две точки и а) касающуюся данной прямой; б) касающуюся данной окружности.

594. Решить задачу 578 методом инверсии.

595. Решить задачу 580 методом инверсии.

596. Решить задачу 579 методом инверсии.

597. Решить задачу Аполлония (задача 581) методом инверсии.

598. Построить окружность, проходящую через две данные точки и пересекающую данную прямую под данным углом.

599. Построить окружность, проходящую через две данные точки и пересекающую данную окружность под данным углом.

600. Построить окружность, проходящую через данную точку и пересекающую две данные окружности под данными углами.

Глава VI

ТЕОРИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

§ 24. Алгебраический метод решения задач на построение

В настоящем параграфе все задачи выполняются при помощи циркуля и линейки.

601. Пусть a, b, c, d, e — данные отрезки. Построить отрезки, заданные формулами:

а) $|x| = \frac{|a|\cdot|b|\cdot|c|}{|d|\cdot|e|}$; б) $|x| = \sqrt[4]{|a|^4 - |b|^4}$, где $|a| > |b|$;

в) $|x| = \frac{|a|^3}{|b|^2}$; г) $x = \frac{|a|^4 + |b|^4}{|a|^3 - |d|^3}$, где $|a| > |d|$.

602. Пусть a и b — данные отрезки. Построить отрезки, длины которых — корни квадратных уравнений:

а) $x^2 - x\sqrt{|a|\cdot|b|} + |a|^2 = 0$;

б) $|a|x^2 - \sqrt{|a|\cdot|b|^3}\,x - |b|\sqrt{|a|^4 - |b|^4} = 0$.

603. Данный отрезок AB разделить в крайнем и среднем отношениях, т. е. получить точку X этого отрезка, удовлетворяющую условию: $|AX|^2 = |AB| \cdot |XB|$.

604. Через данную точку провести секущую к окружности так, чтобы ее внутренняя часть была конгруэнтна отрезку длины $\sqrt{\frac{|a|\cdot\sqrt{|a|^4 - |b|^4}}{|b|}}$, где a и b — данные отрезки.

605. Построить круг, площадь которого равна площади кольца между двумя данными концентрическими окружностями.

606. Построить окружность, проходящую через две точки и касающуюся данной прямой.

607. Построить прямую, параллельную стороне AC треугольника ABC и пересекающую две другие стороны AB и BC соответственно во внутренних точках M и N, так, чтобы площадь треугольника

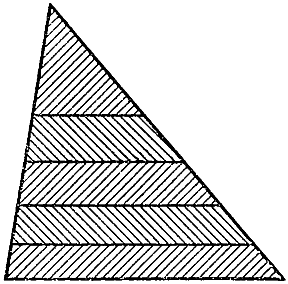


Рис. 7

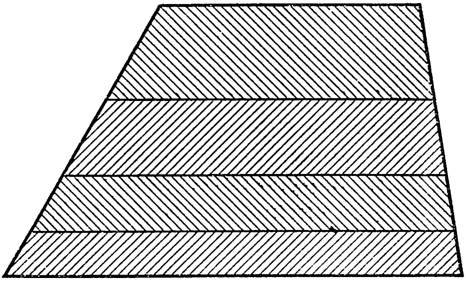


Рис. 8.

MBN относилась к площади трапеции $AMNC$, как $|m| : |n|$, где m и n — данные отрезки.

608. Построить прямую x, параллельную основаниям данной трапеции и пересекающую боковые стороны во внутренних точках, так, чтобы образованные при этом две трапеции с общим основанием на прямой x были равновелики.

609. Провести четыре различные прямые, параллельные одной из сторон треугольника и пересекающие две другие стороны во внутренних точках, так, чтобы треугольник этими прямыми разбивался на пять равновеликих фигур (см. рис. 7).

610. Провести три различные прямые, параллельные основаниям трапеции и пересекающие боковые стороны, так, чтобы данная трапеция этими прямыми разбивалась на четыре равновеликие трапеции (см. рис. 8).

611. Через данную точку A, лежащую вне окружности, провести прямую так, чтобы отношение $|AM| : |MN|$ было равно отношению длин данных отрезков; M и N — точки пересечения прямой с окружностью; точка M лежит между A и N.

612. Построить квадрат, равновеликий данному треугольнику.

613. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник, равновеликий данному прямоугольнику.

614. Построить квадрат, площадь которого была бы равна сумме площадей двух данных прямоугольников.

615. В данную окружность вписать прямоугольник, равновеликий данному квадрату.

616. В данную окружность вписать прямоугольник данного периметра.

617. Построить треугольник ABC, зная R, h_a, $b+c \cong m$, где m — данный отрезок.

618. В данную окружность вписать равнобедренный треугольник, зная сумму (или разность) боковой стороны и высоты, проведенной к основанию.

619. Построить прямоугольный треугольник по данной сумме катетов и высоте, проведенной к гипотенузе.

620. Построить прямоугольный треугольник по данной гипотенузе c и биссектрисе b прямого угла.

621. Построить равнобедренный треугольник, если его боковая сторона конгруэнтна данному отрезку b, а отрезок, определенный ортоцентром и вершиной основания, конгруэнтен данному отрезку q.

622. Разделить окружность на n равных частей при $n = 3\,(4,5,6,10)$.

623. Даны две окружности, касающиеся внешним образом. Построить окружность, которая касается двух данных окружностей и их общей внешней касательной.

§ 25. Разрешимость задач на построение циркулем и линейкой

624. Пусть e — отрезок, длина которого равна единице. Показать, что циркулем и линейкой не могут быть построены отрезки, длины которых равны абсолютным величинам корней уравнения $x^3 - 5x + 1 = 0$.

625. Пусть e — отрезок, длина которого равна единице. Доказать, что циркулем и линейкой можно построить отрезки, длины которых равны абсолютным величинам корней уравнения $2x^3 - 7x^2 + 3x + 5 = 0$.

626. Доказать, что квадрат, равновеликий данному кругу, нельзя построить циркулем и линейкой.

627. Доказать, что циркулем и линейкой нельзя построить ребро куба, объем которого в два раза больше объема данного куба (задача об удвоении куба).

628. Доказать, что циркулем и линейкой нельзя разделить произвольный данный угол на три конгруэнтные части (задача о трисекции угла).

629. Доказать, что циркулем и линейкой нельзя построить треугольник по трем данным его биссектрисам.

630. Доказать, что циркулем и линейкой нельзя построить на окружности точку, отношение расстояний от которой до данной точки и данной прямой равно данному.

631. Доказать, что с помощью циркуля и линейки нельзя вписать в данную окружность равнобедренный треугольник, зная его высоту, проведенную к одной из конгруэнтных сторон.

632. Можно ли окружность разделить на n конгруэнтных частей, если $n = 7,\ 11,\ 18$?

633. Можно ли построить каждый из отрезков, заданных при помощи следующих формул (построить отрезки, если это возможно):

а) $|x| = \dfrac{|a|^3 + |b|^3}{|c|^2}$; г) $|x| = \sqrt[3]{\left(|a|^2 - \dfrac{|b|^5}{|a|^3}\right)|c|}$;

б) $|x| = \sqrt[4]{|a|^4\sqrt{2} - |b|^4}$; д) $|x| = \sqrt{|a|^2 - |a|\cdot|b| + |b|^2}$;

в) $|x| = \sqrt[6]{|a|^6 + |b|^6}$; е) $|x| = \sqrt[4]{|a|\cdot|b|\cdot|c|\cdot|d|}$?

§ 26. Построения на плоскости ограниченными средствами

1. Геометрические построения, выполняемые с помощью угольника с прямым углом или линейки с параллельными краями

634. Выполнить следующие построения с помощью угольника с прямым углом:

а) данный отрезок разделить пополам;

б) удвоить данный отрезок;

в) разделить данный угол пополам;

г) построить центр окружности, описанной около данного треугольника;

д) построить центр данной окружности.

635. Даны прямая l и точка A вне ее. Через данную точку A провести прямую, параллельную данной прямой, пользуясь только двусторонней линейкой.

636. На данной прямой l отложить от данной точки D отрезок, конгруэнтный данному отрезку AB, пользуясь только двусторонней линейкой.

637. Дан острый угол. Удвоить его с помощью двусторонней линейки.

2. Геометрические построения одним циркулем

Во всех задачах данного пункта предполагается:

а) прямая построена, если построены по крайней мере две ее точки;

б) отрезок построен, если построены его концы;

в) угол построен, если построены его вершина и две точки, лежащие на разных сторонах.

638. Даны две различные точки A и B. Построить несколько точек, принадлежащих прямой AB.

639. Построить середину дуги AB данной окружности (O, r).

640. Построить отрезок na, где a — данный отрезок, а n — натуральное число.

641. Построить отрезок $\frac{1}{n}a$, где a — данный отрезок, а n — натуральное число.

642. Даны две различные точки A и B и окружность (O, r). Построить точки пересечения прямой AB и окружности (O, r).

643. Даны четыре точки A, B, C и D. Построить точку пересечения прямых AB и CD.

644. Построить какой-либо угол, конгруэнтный данному углу и отличный от него.

645. Даны три неколлинеарные точки A, B и C. Построить точку D так, что $(AB) \parallel (CD)$.

646. Построить касательную к данной окружности в данной ее точке.

647. Построить хорду данной окружности, проходящую через данную внутреннюю точку окружности и делящуюся в этой точке пополам.

648. Даны точки A и B. Построить прямую, проходящую через точку A и перпендикулярную прямой AB.

649. Дана окружность и вне ее точка A. Построить секущую, проходящую через точку A, так, чтобы ее внешняя часть была конгруэнтна внутренней.

650. Построить точку, симметричную данной точке C относительно прямой, заданной точками A и B.

Глава VII

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

При решении задач настоящей главы всюду предполагается, что построения в пространстве выполняются при помощи циркуля, линейки и инструмента («пластинки»), позволяющего строить плоскости по трем неколлинеарным построенным точкам. С формально логической точки зрения это означает, что следующие операции являются допустимыми шагами построения.

А. Построение плоскости, проходящей через три неколлинеарные построенные точки.

Б. Построение линии пересечения двух построенных непараллельных плоскостей.

В. Выполнение любого построения при помощи циркуля и линейки на построенной плоскости.

Кроме того, предполагается, что точки, прямые, окружности и плоскости, заданные условиями задачи, являются построенными объектами и что существует по крайней мере четыре построенные точки, не лежащие в одной плоскости. Мы будем считать также, что сферическая, цилиндрическая или коническая поверхности заданы (построены), если заданы (построены) определяющие их элементы, т. е. для $\mathrm{S}(O;\ r_0)$ — точка O и отрезок r_0; для $\mathrm{Ц}(l_0,\ r_0)$ — прямая l_0 и отрезок r_0 и для $\mathrm{K}(O,\ l_0, \varphi_0)$ — точка O, прямая l_0 и угол φ_0. Во всех задачах применяются обозначения, список которых помещен на с. 171.

§ 27. Задачи на отыскание множеств точек и прямых в пространстве

651. Найти множество всех точек пространства, равноудаленных от двух различных точек A и B.

652. Найти множество точек, разность квадратов расстояний от которых до двух различных точек A и B постоянна.

653. Найти множество всех точек пространства, равноудаленных от трех данных неколлинеарных точек A, B и C.

654. Найти множество всех точек пространства, равноудаленных от четырех данных точек A, B, C и D, если эти точки:

а) не принадлежат одной плоскости;

б) принадлежат одной плоскости.

655. Найти множество всех точек пространства, равноудаленных от:

а) двух различных параллельных прямых;

б) двух пересекающихся прямых.

656. Найти множество всех точек пространства, равноудаленных от:

а) трех различных прямых l_1, l_2, l_3 ($l_1 \parallel l_2$, $l_1 \cap l_3 \neq \varnothing$, $l_2 \cap l_3 \neq \neq \varnothing$);

б) трех попарно пересекающихся прямых, не проходящих через одну точку;

в) трех прямых, проходящих через одну точку и не лежащих в одной плоскости;

г) трех попарно параллельных различных прямых, не лежащих в одной плоскости.

657. Найти множество всех точек пространства, находящихся на данном расстоянии от данной плоскости.

658. Найти множество всех точек пространства, равноудаленных от:

а) двух различных параллельных плоскостей;

б) двух пересекающихся плоскостей Π_1 и Π_2.

659. Найти множество всех точек пространства, равноудаленных от трех различных плоскостей Π_1, Π_2, Π_3, если:

а) $\Pi_1 \parallel \Pi_2$, $\Pi_3 \cap \Pi_1 \neq \varnothing$, $\Pi_3 \cap \Pi_2 \neq \varnothing$;

б) плоскости пересекаются попарно, но не имеют общей точки;

в) пересечение плоскостей — точка.

660. Найти множество проекций данной точки на прямые, лежащие в данной плоскости и проходящие через другую данную точку.

661. Найти множество проекций данной точки A на все плоскости, проходящие через данную прямую l ($A \notin l$).

662. Найти множество всех точек пространства, из которых данный отрезок виден под данным углом.

663. Найти множество проекций данной точки A пространства на все плоскости, проходящие через данную точку B ($B \neq A$).

664. Найти множество всех точек пространства, сумма квадратов расстояний от которых до двух данных различных точек постоянна.

665. Даны плоскость Π и две точки A и B ($A \notin \Pi$, $B \notin \Pi$). Найти множество всех таких точек M плоскости Π, что прямые MA и MB образуют с этой плоскостью конгруэнтные углы.

666. Найти множество всех точек, для которых отношение расстояний до двух данных точек постоянно.

667. Найти множество всех точек, расстояния от которых до трех данных точек относятся как $|m| : |n| : |p|$ (m, n, p — данные отрезки).

668. Найти множество точек, отношение расстояний от которых до двух данных параллельных прямых l_1 и l_2 равно отношению $|m| : |n|$ ($m \not\cong n$).

669. Найти множество точек, отношение расстояний от которых до двух данных плоскостей Π_1 и Π_2 равно $|m| : |n|$ (где m и n — данные неконгруэнтные отрезки).

670. В пространстве даны две скрещивающиеся взаимно перпендикулярные прямые l_1 и l_2, (AB) — их общий перпендикуляр ($A \in l_1$, $B \in l_2$). M и N — произвольные точки прямых l_1 и l_2 соответственно. Доказать, что сфера с диаметром MN проходит через точки A и B. Найти множество центров этих сфер, если $[AM] \cong [BN]$.

671. Найти объединение всех прямых, перпендикулярных к данной прямой и проходящих через данную точку.

672. Найти объединение всех прямых, пересекающих данную прямую и параллельных другой прямой.

673. Найти объединение всех прямых, проходящих через данную точку и образующих конгруэнтные углы с двумя данными скрещивающимися прямыми.

674. Найти объединение всех прямых, проходящих через данную точку A и образующих конгруэнтные углы с двумя данными различными плоскостями Π_1 и Π_2.

675. Найти объединение осей всех конусов, касающихся двух данных плоскостей Π_1 и Π_2.

676. Найти объединение всех прямых, проходящих через данную точку A и образующих данный угол φ с данной прямой l, $A \notin l$.

677. Найти объединение всех прямых, проходящих через данную точку и образующих данный угол φ с данной плоскостью Π.

678. Найти объединение всех прямых, проходящих через данную точку A и отстоящих от данной точки B на данное расстояние $|r|$.

679. Даны две различные параллельные прямые l_1 и l_2. Найти объединение всех прямых, симметричных прямой l_1 относительно всех плоскостей, проходящих через прямую l_2.

680. Найти объединение ребер всех прямых двугранных углов, грани которых касаются данной цилиндрической поверхности.

681. Найти объединение всех прямых, проходящих через данную точку A и пересекающих сферу $S(O, r)$ по хордам данной длины.

§ 28. Простейшие построения

682. Через данную точку A провести прямую, параллельную данной прямой l ($A \notin l$).

683. Через данную прямую провести плоскость, параллельную другой данной прямой.

684. Построить пару параллельных плоскостей, каждая из которых проходит через одну из двух данных скрещивающихся прямых.

685. Через точку провести плоскость, параллельную данной.

686. Через данную точку провести плоскость, перпендикулярную данной прямой.

687. Через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной плоскости.

688. Через данную прямую провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости.

689. Через данную точку провести прямую, перпендикулярную каждой из двух данных скрещивающихся прямых и пересекающую каждую из них.

690. Построить линию пересечения данной сферической поверхности с данной плоскостью.

691. Построить точки пересечения данной сферической поверхности с данной прямой l.

692. Построить линию пересечения данной конической поверхности с данной плоскостью, проходящей через вершину этой поверхности.

693. Построить линию пересечения данной конической поверхности с данной плоскостью П, перпендикулярной к оси конической поверхности.

694. Построить точки пересечения данной прямой с данной конической поверхностью.

695. Построить линию пересечения данной цилиндрической поверхности с данной плоскостью, перпендикулярной (параллельной) оси данной поверхности.

696. Построить точки пересечения данной цилиндрической поверхности с данной прямой.

697. Через данную прямую l провести плоскость, касающуюся данной сферической поверхности.

698. Через данную точку провести плоскость, касающуюся данной конической (цилиндрической) поверхности.

§ 29. Построения в пространстве с применением свойств некоторых множеств точек

699. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. На прямой b построить точку B так, чтобы $[BH] \cong n$, где n — данный отрезок, H — проекция точки B на прямую a.

700. Дана прямая l и две точки A и B, не лежащие на данной прямой. На прямой l построить такую точку M, чтобы $|AM|^2 - |BM|^2 = |p|^2$ (p — данный отрезок).

701. Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, и плоскость П. Построить точку M плоскости П так, чтобы $|AM| : |BM| : |CM| = |m| : |n| : |p|$ (m, n, p — данные отрезки).

702. Даны плоскость П и две точки A и B, не принадлежащие П. В плоскости П построить такую точку M, чтобы отрезки MA и MB образовали с плоскостью П конгруэнтные углы и $\widehat{AMB} = 90°$.

703. На данной сферической поверхности построить точку, равноудаленную от прямых, содержащих стороны данного ромба.

704. Даны три попарно пересекающиеся, но не проходящие через одну точку прямые и плоскость П. В плоскости П построить точку, равноудаленную от трех данных прямых.

705. Построить точку, равноудаленную от данных прямых l_1, l_2, l_3, l_4, если прямые l_1, l_2 и l_3 попарно параллельны и не лежат в одной плоскости, а прямая l_3 пересекает l_4.

706. Даны две точки A, B и прямая l ($A \notin l$, $B \notin l$). Через точку B провести такую плоскость Π, что проекция точки A на плоскость Π принадлежит прямой l.

707. Даны прямая l и окружность, лежащая в плоскости, параллельной l. Построить точку M данной окружности так, чтобы $[MH] \cong p$ (p — данный отрезок, H — проекция точки M на прямую l).

708. Даны точка A, сфера $S(O, r)$ и плоскость Π. На сфере $S(O, r)$ построить точку M, принадлежащую касательной, проведенной из точки A к данной сфере, так, чтобы $[MN] \cong p$ (p — данный отрезок), $(MN) \perp \Pi$ ($N \in \Pi$).

709. Даны две точки A, B и окружность. На данной окружности построить точку M так, чтобы $|AM|^2 + |BM|^2 = |m|^2$, где m — данный отрезок.

710. Даны три различные плоскости Π_1, Π_2, Π_3 ($\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \varnothing$) и точка A. В плоскости Π_3 построить точку M так, чтобы $[AM] \cong p$ и отношение расстояний от M до плоскостей Π_1 и Π_2 равнялось $|m| : |n|$ (p, m, n — данные отрезки).

711. Даны три прямые l_1, l_2 и l_3, проходящие через точку O и не лежащие в одной плоскости, а также две пересекающиеся плоскости Π_1 и Π_2. Найти точки, равноудаленные от прямых l_1, l_2, l_3 и от плоскостей Π_1 и Π_2.

712. Построить сферическую поверхность, касающуюся данной плоскости в данной на ней точке и проходящую через другую данную точку.

713. Построить сферическую поверхность, касающуюся двух данных плоскостей и проходящую через две точки, не лежащие в данных плоскостях.

714. Построить центр сферической поверхности, проходящей через четыре данные точки, не лежащие в одной плоскости.

715. Построить сферическую поверхность, которая касается четырех плоскостей, пересекающихся попарно по шести прямым.

716. Даны три попарно скрещивающиеся прямые. Провести прямую, пересекающую данные прямые в трех точках M, N и P соответственно, причем N — середина отрезка MP.

717. На данной окружности построить точку, разность квадратов расстояний от которой до данных точек A и B равна $|m|^2$ (m — данный отрезок).

718. На данной конической поверхности построить точку, равноудаленную от трех данных точек, не лежащих на одной прямой.

719. Через данную точку A провести прямую так, чтобы середина M отрезка этой прямой, заключенного между данными параллельными плоскостями Π_1 и Π_2, принадлежала плоскости Π_3 ($\Pi_3 \cap \Pi_1 \neq \varnothing$), а $[AM] \cong m$ (m — данный отрезок).

720. На данной плоскости Π построить прямую, каждая точка которой равноудалена от двух данных точек, не лежащих в плоскости Π.

§ 30. Построения в пространстве с применением свойств некоторых множеств точек (продолжение)

721. Даны три различные плоскости Π_1, Π_2 и Π_3, не пересекающиеся в одной точке. Построить коническую поверхность, касающуюся плоскостей Π_1 и Π_2, ось которой принадлежит плоскости Π_3.

722. Через данную точку пространства провести касательную к данной сфере, перпендикулярную данной прямой.

723. Даны коническая поверхность и прямая l, не проходящая через вершину этой поверхности. Построить образующую данной поверхности, перпендикулярную l.

724. Даны две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 и плоскость Π. Построить прямую, перпендикулярную плоскости Π и пересекающую l_1 и l_2.

725. Построить ось конической поверхности, если даны три образующие этой поверхности.

726. Построить коническую поверхность, если известны две образующие этой поверхности и угол, который составляют образующие с осью поверхности.

727. Даны две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 и точка A. Через точку A провести прямую, образующую с прямыми l_1 и l_2 углы, конгруэнтные данному углу φ.

728. Даны три плоскости, пересекающиеся в одной точке. Построить коническую поверхность, касающуюся данных плоскостей.

729. Даны точка A, прямая l $(A \notin l)$, плоскость Π. Через данную точку A провести прямую, пересекающую l и составляющую данный угол φ с плоскостью Π.

730. Построить в данной плоскости Π прямую, проходящую через точку пересечения Π с данной прямой l и образующую с l угол, конгруэнтный данному углу $(l \not\perp \Pi)$.

731. Через данную точку провести прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые, в предположении, что данная точка не лежит ни на одной из данных прямых.

732. Через данную точку провести прямую, параллельную данной плоскости и пересекающую данную прямую.

733. Провести прямую, пересекающую две данные прямые и параллельную третьей данной прямой.

734. Построить прямую, пересекающую две данные прямые, перпендикулярную третьей данной прямой и параллельную данной плоскости.

735. Даны плоскость Π и пересекающая ее прямая l. В плоскости Π провести прямую, пересекающую l и параллельную другой данной плоскости.

736. Провести в данной плоскости Π прямую, перпендикулярную данной прямой, не лежащей в Π, и проходящую через данную точку.

737. Через точку M плоскости Π провести прямую, образующую с плоскостью Π угол, конгруэнтный данному, и перпендикулярную к данной прямой, лежащей в этой плоскости.

738. Построить прямую, пересекающую каждую из двух данных скрещивающихся прямых, перпендикулярную к одной из них и параллельную данной плоскости.

739. Через данную точку A провести прямую, пересекающую одну из данных прямых l_1, l_2 и образующую с другой угол, конгруэнтный данному.

740. Даны плоскость П и две точки A и B ($A \in П$, $B \notin П$). В плоскости П через точку A провести прямую так, чтобы отрезок BB_1 был конгруэнтен данному отрезку (B_1 — проекция B на искомую прямую).

Глава VIII

МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Во всех задачах этой главы предполагается, что зафиксирована некоторая плоскость в пространстве, которая называется *плоскостью изображения* и обозначается П. Оригинал и проекции точек и прямых на плоскость П будем обозначать одной и той же буквой, снабжая обозначение оригинала чертой сверху. При проектировании плоских фигур предполагается, что плоскость фигуры не параллельна направлению проектирования.

§ 31. Изображение плоских фигур в параллельной проекции

741. Доказать, что произвольный треугольник ABC плоскости П есть параллельная проекция треугольника, подобного любому заданному треугольнику $\bar{A}_0\bar{B}_0\bar{C}_0$.

742. Доказать, что если для трех неколлинеарных точек $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ плоской фигуры даны их изображения A, B, C, то изображение M любой точки $\bar{M}$ этой плоской фигуры определено однозначно.

743. Доказать, что любой параллелограмм плоскости П является параллельной проекцией квадрата.

744. Доказать, что окружность при параллельном проектировании переходит в эллипс, ее взаимно перпендикулярные диаметры — в сопряженные диаметры эллипса, а касательная к окружности — в касательную к эллипсу.

745. В плоскости П дано изображение двух взаимно перпендикулярных диаметров окружности $\bar{\Omega}$. Построить оси эллипса, являющегося изображением окружности $\bar{\Omega}$.

746. В плоскости П задан эллипс — изображение окружности $\bar{\Omega}$. Построить изображение правильного треугольника (квадрата, правильного шестиугольника), вписанного в окружность $\bar{\Omega}$.

747. В плоскости П задан эллипс — изображение окружности $\bar{\Omega}$. Построить изображение правильного треугольника (квадрата, правильного шестиугольника), описанного около окружности $\bar{\Omega}$.

748. Построить изображение прямоугольного равнобедренного треугольника, описанного около окружности, если в плоскости П дано изображение окружности.

749. В плоскости П дано изображение окружности. Построить изображение описанного около этой окружности ромба, острый угол которого равен 60°.

750. Построить изображение трапеции, вписанной в окружность, основания которой видны из центра окружности под углами в 60° и 120°, если в плоскости П дано изображение окружности.

751. В плоскости П даны прямая l и треугольник ABC — изображение прямой $\bar{l}$ и правильного треугольника $\overline{ABC}$, лежащих в одной плоскости. Построить изображение перпендикуляра, опущенного из точки $\bar{C}$ на прямую $\bar{l}$.

752. В плоскости П даны прямая l, точка P и параллелограмм $ABCD$ — изображение прямой $\bar{l}$, точки $\bar{P}$ и квадрата $\overline{ABCD}$, лежащих в одной плоскости. Построить изображение перпендикуляра, опущенного из точки $\bar{P}$ на прямую $\bar{l}$.

§ 32. Аксонометрия

Во всех позиционных задачах этого параграфа предполагается, что заданы аксонометрические оси (OX), (OY), (OZ) в плоскости изображения П, а в метрических задачах предполагаются построенными и масштабные эллипсы.

Для сокращения записи в ряде задач употребляется формулировка «дана точка» (прямая, плоскость и т. д.). Это означает, что дана параллельная проекция и одна из вторичных проекций точки (прямой и т. д.).

1. Позиционные задачи

753. Дана прямая (l, l_3). Построить ее следы на аксонометрических плоскостях.

754. Даны следы прямой на плоскостях $\overline{ZOX}$, $\overline{YOZ}$. Найти след той же прямой на плоскости $\overline{XOY}$.

755. Дан след плоскости $\bar{\alpha}$ на плоскости $\overline{YOZ}$ и точка (A, A_3), через которую проходит плоскость $\bar{\alpha}$. Построить два других следа этой плоскости.

756. Как известно, плоскость $\bar{\alpha}$ порождает на плоскости изображения П аффинное соответствие S_α между аксонометрическими проекциями точек плоскости и их вторичными проекциями. Во что превращается соответствие S_α, если: а) $\bar{\alpha}$ совпадает с плоскостью $\overline{XOY}$; б) $\bar{\alpha}$ параллельна оси $(\overline{OZ})$ (или проходит через нее); в) плоскость $\bar{\alpha}$ параллельна направлению проектирования.

757. Построить следы плоскости, заданной двумя пересекающимися прямыми $(l, l_з)$, $(m, m_з)$.

758. Плоскость задана следами, прямая — аксонометрической и вторичной проекцией. Найти точку их пересечения.

759. Даны три прямые $(a, a_з)$, $(b, b_з)$, $(l, l_з)$; при этом первые две лежат в одной плоскости $\bar{\alpha}$. Построить точку $(L, L_з)$, в которой плоскость $\bar{\alpha}$ пересекается с прямой $\bar{l}$.

760. Одна плоскость задана своими следами, вторая — тремя точками $(A, A_з)$, $(B, B_з)$, $(C, C_з)$. Построить их линию пересечения.

761. Дано аксонометрическое изображение пятиугольной призмы, основание которой лежит в плоскости $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$, а ребра параллельны оси $(\overline{O}\overline{Z})$. Построить изображение сечения призмы плоскостью $\bar{\alpha}$, заданной своими следами на плоскостях $\overline{Y}\overline{O}\overline{Z}$, $\overline{X}\overline{O}\overline{Z}$.

762. Одна плоскость задана прямыми $(a, a_з)$ и $(b, b_з)$, а вторая — прямыми $(c, c_з)$, $(d, d_з)$. Построить прямую, по которой пересекаются данные плоскости.

763. Пирамида $\bar{S}\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ задана вершиной $(S, S_з)$ и плоскостью основания $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, совпадающей с плоскостью $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$. Построить точки пересечения данной прямой $(l, l_з)$ с боковыми гранями пирамиды.

2. Метрические задачи

764. По заданному изображению AB отрезка $\bar{A}\bar{B}$, лежащего в плоскости $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$, построить отрезок PQ, конгруэнтный $[\bar{A}\bar{B}]$, если в плоскости Π задан отрезок, конгруэнтный единичному в оригинале.

765. Дано изображение l прямой $\bar{l}$, лежащей в плоскости $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$. Построить изображение перпендикуляра, проведенного из точки $\bar{O}$ к прямой $\bar{l}$.

766. Даны три точки $(M, M_з)$, $(N, N_з)$ и $(P, P_з)$ окружности. Построить ее центр $(C, C_з)$.

767. Построить проекцию биссектрисы угла, лежащего в плоскости $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$, если даны проекции его сторон.

768. В плоскости $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$ даны прямая $\bar{l}$ и квадрат $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, сторона $\bar{A}\bar{B}$ которого параллельна прямой $\bar{l}$. Построить проекцию квадрата, если дана проекция l прямой $\bar{l}$ и известно, что длина стороны квадрата равна 2.

769. Даны точки $(A, A_з)$ и $(B, B_з)$. Построить отрезок PQ, конгруэнтный отрезку $\bar{A}\bar{B}$, если в плоскости Π задан отрезок, конгруэнтный единичному в оригинале.

770. Даны точки $(A, A_з)$, $(B, B_з)$. В плоскости Π построить угол, конгруэнтный углу, который составляет отрезок $\bar{A}\bar{B}$ с осью $(\overline{O}\overline{X})$.

771. Плоскость $\bar{\alpha}$ задана своими следами. Построить проекцию перпендикуляра, проведенного из точки $\bar{O}$ на плоскость $\bar{\alpha}$.

772. В плоскости $\bar{\alpha}$, заданной своими следами, даны точка $\bar{P}$ и прямая $\overline{l}$. Построить проекцию перпендикуляра, проведенного из точки $\overline{P}$ на прямую $\overline{l}$.

773. Построить следы плоскости, перпендикулярной прямой (l, l_3) и проходящей через точку (A_1, A_3).

774. В диметрической проекции, для которой $2l_x = l_y = l_z$, $Y\widehat{O}Z = 90°$, $X\widehat{O}Y = 120°$, построить изображение правильной пятиугольной призмы; боковое ребро призмы параллельно оси $(\overline{OZ})$ и имеет длину, равную 5, а одна из сторон ее основания параллельна оси $(\overline{OY})$ и равна по длине 2.

775. В кабинетной проекции изобразить правильный тетраэдр, высота которого параллельна оси $(\overline{OZ})$, одна из сторон основания параллельна оси $(\overline{OX})$ и конгруэнтна данному отрезку.

§ 33. Ортогональные аксонометрические проекции

В этом параграфе помещен ряд задач на изображение комбинации сферы с многогранниками и телами вращения в ортогональных аксонометрических проекциях. В задачах данного параграфа принята следующая терминология.

Очертанием сферы называется окружность, которая является изображением видимого контура сферы, т. е. сечения сферы плоскостью, проходящей через центр и параллельной плоскости П.

Сечение сферы некоторой плоскостью (обычно горизонтальной), проходящей через центр, называется экватором, а сечения плоскостями, проходящими через диаметр $\overline{NS}$ сферы, перпендикулярный к плоскости экватора,— меридианами. Концы диаметра $\overline{N}, \overline{S}$ называются северным и южным полюсами. Предполагается, что плоскость экватора не перпендикулярна плоскости П. При этом условии экватор и меридианы изображаются эллипсами, касающимися очертания шара. Построить изображение сферы — значит построить ее очертание и один из полюсов, или оси экватора (или сопряженные диаметры).

776. В ортогональной триметрической проекции $l_y = 2l_x$, $X\widehat{O}Y = 135°$ найти углы YOZ и XOZ и все три коэффициента искажения.

777. Для ортогональной триметрической проекции, у которой $l_y = 2l_x$, $X\widehat{O}Y = 120°$, найти углы YOZ, XOZ и коэффициенты искажения.

778. В ортогональной аксонометрической проекции дано: $l_x : l_y : l_z = 4 : 5 : 6$. Построить углы между аксонометрическими осями.

779. а) Построить куб в ортогональной диметрической (изометрической) проекции с ребрами, параллельными координатным осям.

б) Построить правильный тетраэдр в ортогональной изометрии (диметрии) так, чтобы его высота $\overline{SH}$ была параллельна $(\overline{OZ})$, а сторона и высота основания были соответственно параллельны $(\overline{OX})$ и $(\overline{OY})$.

780. В плоскости П даны эллипс и прямая l, которые являются ортогональными проекциями окружности, лежащей в плоскости $\overline{\alpha}$, и прямой $\overline{l}$, перпендикулярной к плоскости $\overline{\alpha}$. Доказать, что малая ось данного эллипса параллельна прямой l, а большая ось — прямой $p = \overline{\alpha} \cap П$.

781. На плоскости П дано очертание шара и изображение экватора. Построить полюсы.

782. На плоскости П дано очертание сферы и изображение ее экватора. Построить оси и несколько точек на меридиане, проходящем через точку K на экваторе.

783. Построить оси эллипса и его точки касания с очертанием сферы, если известно, что этот эллипс является изображением сечения сферы, параллельного экватору и делящего радиус сферы пополам.

784. Построить изображение правильной треугольной призмы, описанной около сферы, если дано ее очертание и изображение экватора.

785. Призма, в основании которой лежит четырехугольник $ABCD$ с взаимно перпендикулярными диагоналями и углами $\overline{A}$ и $\overline{C}$, равными 60° и 120°, описана около сферы. Построить ее изображение, если дано очертание сферы и изображен экватор.

786. Построить изображение правильного тетраэдра, вписанного в сферу.

787. Построить изображение правильной четырехугольной призмы, вписанной в сферу, боковое ребро которой относится к стороне основания как $2\sqrt{2} : 1$, если дано очертание сферы и изображен ее полюс N.

788. Построить изображение правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в сферу, если даны ее очертание, полюс и отрезок, конгруэнтный боковому ребру пирамиды.

789. В ортогональной диметрической проекции построить изображение куба и вписанной в него сферы.

790. В ортогональной изометрической проекции построить изображение правильного тетраэдра и вписанной в него сферы.

791. Построить изображение сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, высота которой относится к стороне основания как $\sqrt{3} : 2$.

§ 34. Полные и неполные изображения

Во всех задачах этого параграфа, где упоминаются цилиндр и конус, нужно иметь в виду, что речь идет о поверхностях вращения.

792. Две прямые, проходящие через одну точку, пересекают грани двугранного угла в четырех точках. Три из них даны на изображении. Построить изображение четвертой точки.

793. Построить чертеж к задаче: в усеченном параллелепипеде три боковых ребра по порядку имеют длины a, b, c; определить длину четвертого бокового ребра.

794. Изобразить куб и его сечение плоскостью, проходящей через середины двух смежных сторон верхнего основания и через центр нижнего основания.

795. Дано изображение $SABCD$ четырехугольной пирамиды и точки $\overline{K}$ на ее ребре. Сечение пирамиды плоскостью $\overline{\alpha}$, проходящей через точку $\overline{K}$, имеет форму параллелограмма; построить на чертеже это сечение.

796. Построить изображение пятиугольной пирамиды и ее сечения плоскостью, проходящей через три точки, лежащие на различных боковых гранях пирамиды.

797. Построить изображение шестиугольной призмы и ее сечения плоскостью, проходящей через сторону основания и точку на боковом ребре.

798. Дать чертеж к задаче: в правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах пирамиды, а остальные четыре — в плоскости ее основания. Определить ребро куба, если в пирамиде длина стороны основания равна a, а длина высоты — h.

799. Дано изображение цилиндра. Построить на изображении несколько точек сечения цилиндра плоскостью, проходящей через точку на его верхнем основании, и прямую, принадлежащую плоскости нижнего основания.

800. Дано изображение конуса. Выбрать три точки, принадлежащие его боковой поверхности, и построить на изображении еще точки, принадлежащие поверхности конуса и плоскости, проходящей через три выбранные точки.

801. Дано изображение цилиндра. Построить изображение треугольной пирамиды и ее точек пересечения с поверхностью цилиндра, если ее основание описано около основания цилиндра, а высотой является высота цилиндра.

802. Дано изображение цилиндра и конуса, имеющих общую плоскость оснований. Построить изображения точек их пересечения, если они имеют общую высоту, а радиус основания цилиндра в 2 раза меньше радиуса основания конуса.

803. Дано изображение цилиндра. Построить изображение четырехугольной пирамиды, описанной около цилиндра.

804. Дано изображение произвольного октаэдра. Можно ли построить изображение точки пересечения прямой, соединяющей противолежащие вершины с плоскостью, проходящей через три другие вершины?

§ 35. Метрическая определенность изображений

1. Изображение плоских фигур

805. В плоскости П дано изображение ABC равнобедренного треугольника $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ ($[\overline{A}\overline{B}] \cong [\overline{A}\overline{C}]$), высота которого равна стороне основания. Построить изображения высот треугольника и центра окружности, описанной около треугольника.

806. Дано изображение ABC треугольника и его ортоцентра H. В плоскости П построить треугольник, подобный оригиналу.

807. Дано изображение $ABCD$ квадрата и точки M на его стороне. Построить изображение правильного треугольника, одна вершина которого находилась бы в точке M, а две другие — на каких-либо других сторонах квадрата.

808. Дано изображение ABC треугольника и его ортоцентра. Построить изображение квадрата, вписанного в этот треугольник, так, чтобы одна его сторона лежала на стороне AB, а две другие вершины — на двух других сторонах треугольника.

809. Построить изображения правильного пятиугольника и правильного восьмиугольника.

2. Изображение пространственных фигур

810. Построить изображения: а) куба; б) правильного тетраэдра; в) правильной пятиугольной призмы с данной высотой; г) правильной шестиугольной пирамиды.

811. Построить изображение треугольной пирамиды и ее высоты $\overline{S}\overline{H}$, если основанием пирамиды служит треугольник $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ с тупым углом $\overline{A}$, а вершина $\overline{S}$ одинаково удалена от точек $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$.

812. Изобразить наклонную призму и ее высоту $\overline{A}_1\overline{H}$, если основанием призмы служит равнобедренный треугольник $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ ($[\overline{A}\overline{B}] \cong [\overline{A}\overline{C}]$), а вершина $\overline{A}_1$, лежащая на ребре $\overline{A}\overline{A}_1$, равноудалена от точек $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$.

813. Построить изображение $SABC$ правильной треугольной пирамиды и всех точек ее поверхности, равноудаленных от концов апофемы $\overline{S}\overline{D}$ грани $\overline{S}\overline{B}\overline{C}$, если известно, что апофема в два раза больше высоты основания.

814. Построить изображение $SABCD$ правильной четырехугольной пирамиды и всех точек на ее поверхности, равноудаленных от плоскости основания и плоскости грани $\overline{S}\overline{A}\overline{B}$, если $|\overline{S}\overline{A}| : |\overline{A}\overline{B}| = \sqrt{5} : 2$.

815. Изобразить: а) правильный тетраэдр $\overline{S}\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ и перпендикуляр, проведенный через точку $\overline{P}$ на его грани $\overline{S}\overline{A}\overline{B}$ к грани $\overline{S}\overline{B}\overline{C}$; б) множество всех точек на поверхности этого тетраэдра, равноудаленных от середины ребра $\overline{S}\overline{A}$ и вершины $\overline{B}$.

816. В правильной треугольной призме $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1$ с основанием $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ $|\overline{A}\overline{A}_1| : |\overline{A}\overline{B}| = 3 : 2$. Построить изображения: а) этой призмы и всех точек на ее поверхности, равноудаленных от вершин $\overline{B}$ и $\overline{C}_1$; б) плоскости, проходящей через вершину $\overline{C}$, перпендикулярной плоскости $\overline{A}\overline{B}\overline{C}_1$ и параллельной ребру $\overline{A}\overline{B}$ этой призмы.

817. Построить изображение $\overline{SABC}$ правильной треугольной пирамиды и всех точек на ее поверхности, равноудаленных от концов бокового ребра $\overline{SA}$, если $|\overline{SA}| : |\overline{AB}| = 2 : 1$. Построить угол, конгруэнтный линейному углу двугранного угла этой пирамиды при боковом ребре $\overline{SA}$.

818. На изображении $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куба дана точка P ($P \in [BC_1]$). Построить углы, конгруэнтные тем углам, под которыми из точки $\overline{P}$ видны ребра $\overline{AA_1}$ и $\overline{CC_1}$.

819. Дано изображение $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куба. Построить изображение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым: а) $\overline{A_1C}$ и $\overline{BB_1}$; б) $\overline{A_1C}$ и $\overline{BD}$; в) $\overline{BD}$ и $\overline{AD_1}$.

820. Дано изображение $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куба. Построить изображение всех точек, лежащих на поверхности куба и равноудаленных: а) от концов диагонали куба; б) от диагонали грани и диагонали куба, проходящей через одну вершину.

821. Построить изображение куба и вписанной в него правильной треугольной призмы, если ее осью служит диагональ куба, а основания призмы делят диагональ куба на три конгруэнтных между собой отрезка.

§ 36. Метод Монжа

В задачах этого параграфа употребляются следующие обозначения. Горизонтальная плоскость проекций обозначается через σ_1, фронтальная — через σ_2. Проекциям точек (прямых) на горизонтальную плоскость приписывается индекс 1, а проекциям на фронтальную плоскость — индекс 2.

822. Дана точка (M_1, M_2), лежащая в первой четверти. Построить проекции точек, симметричных с точкой $\overline{M}$ относительно биссекторных плоскостей двугранных углов между плоскостями проекций.

823. Как располагаются на эпюре горизонтальная и фронтальная проекции l_1 и l_2 прямой $\overline{l}$, если $\overline{l}$ параллельна одной из плоскостей σ_1 и σ_2?

824. Рассмотреть, как расположены проекции l_1, l_2, если для прямой $\overline{l}$ имеет место один из следующих случаев: а) $\overline{l} \perp \sigma_1$; б) $\overline{l} \perp \sigma_2$; в) $\overline{l}$ ортогональна оси проекции x (т. е. составляет с осью x прямой угол, но может и не пересекать x).

825. Как различить на эпюре пересекающиеся прямые и скрещивающиеся?

826. По проекциям l_1 и l_2 прямой $\overline{l}$ построить ее следы P_1 и P_2, и обратно: по следам P_1 и P_2 построить проекции l_1 и l_2.

827. Дан треугольник $\overline{ABC}$ проекциями своих вершин. Найти следы сторон этого треугольника на плоскостях проекций.

828. Найти точку пересечения прямой (l_1, l_2) с плоскостью, заданной двумя лежащими в ней прямыми (p_1, p_2) и (q_1, q_2).

829. Построить следы плоскости, проходящей через данную точку (A_1, A_2) и данную прямую (l_1, l_2).

830. По данной горизонтальной проекции K_1 точки $\overline{K}$, лежащей в плоскости, построить ее фронтальную проекцию, если: а) плоскость задана тремя точками; б) плоскость задана следами.

831. Определить, какому условию должны удовлетворять проекции l_1 и l_2 прямой $\overline{l}$, чтобы она лежала в плоскости, заданной следами.

832. Построить линию пересечения (p_1, p_2) двух плоскостей, заданных своими следами.

§ 37. Линейная перспектива

833. Построить перспективу точки, если она лежит: а) в предметной плоскости; б) в картинной плоскости.

834. Построить перспективу прямой $\overline{l}$ и перспективу ее основания $\overline{l}_1$, если: а) прямая $\overline{l}$ параллельна картинной плоскости; б) $\overline{l}$ лежит в картинной плоскости; в) $\overline{l}$ расположена в плоскости, перпендикулярной основанию картины; г) прямая $\overline{l}$ перпендикулярна картинной плоскости и не проходит через точку зрения; д) $\overline{l}$ проходит через точку зрения.

835. Дана прямая (l, l_1). Найти ее след, точку схода, точку пересечения с предметной плоскостью.

836. Через данную точку (A, A_1) провести прямую, параллельную данной прямой (l, l_1).

837. Плоскость $\overline{\alpha}$ проходит через точку (B, B_1) и прямую (a, a_1). Построить для $\overline{\alpha}$ ее ось, линию схода и след.

838. Построить линию схода, ось и след плоскости $\overline{\alpha}$, которая проходит через данную прямую (a, a_1) и параллельна другой данной прямой (l, l_1).

839. Построить прямую (l, l_1), проходящую через данную точку (A, A_1) и пересекающую данные прямые (b, b_1) и (d, d_1).

840. Плоскость $\overline{\alpha}$ задана тремя своими точками (A, A_1), (B, B_1) и (D, D_1). Построить ось плоскости $\overline{\beta}$, которая параллельна плоскости $\overline{\alpha}$ и проходит через точку (M, M_1).

841. Построить точку (M, M_1) пересечения данной прямой (l, l_1) с плоскостью $\overline{\alpha}$, проходящей через две пересекающиеся прямые (a, a_1) и (b, b_1).

842. Дана плоскость $\overline{\alpha}$ линией схода и следом. Найти перспективу M точки $\overline{M}$ плоскости $\overline{\alpha}$, если дана перспектива M_1 основания $\overline{M}_1$.

Раздел третий

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ

Глава IX

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Решение задач этой главы потребует знакомства с системами аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства и проективной плоскости, а также с системой аксиом Гильберта [17].

1. Аксиомы Вейля трехмерного евклидова пространства

Основными объектами геометрии считаются векторы ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$...) и точки ($A$, B, C, ...), а основными отношениями — сумма векторов, умножение вектора на число, скалярное произведение, установленное ненулевым вектором $\boldsymbol{u}$[1], и принадлежность упорядоченной пары точек и вектора[2].

Основные понятия удовлетворяют следующим аксиомам:

Аксиомы векторного пространства

V1. $\forall \boldsymbol{a}$, $\forall \boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

V2. $\forall \boldsymbol{a}$, $\forall \boldsymbol{b}$, $\forall c$: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+c=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+c)$.

V3. Существует такой вектор $\mathbf{0}$, что для любого $\boldsymbol{a}$ имеем: $\boldsymbol{a}\cdot 0=\mathbf{0}$.

V4. $\forall \boldsymbol{a}$: $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

V5. $\forall\alpha$, $\forall\beta$, $\forall \boldsymbol{a}$: $\alpha(\beta\boldsymbol{a})=(\alpha\beta)\boldsymbol{a}$.

V6. $\forall\alpha$, $\forall \boldsymbol{a}$, $\forall \boldsymbol{b}$: $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$.

V7. $\forall\alpha$, $\forall\beta$, $\forall \boldsymbol{a}$: $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$.

Аксиомы размерности

D1. Существуют такие векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, что из соотношения $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$ следует: $\alpha=\beta=\gamma=0$.

[1] Предполагается, что если зафиксирован некоторый произвольно выбранный ненулевой вектор $\boldsymbol{u}$, то для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ однозначно определяется число $\boldsymbol{ab}/\boldsymbol{u}$, которое называется их скалярным произведением, установленным вектором $\boldsymbol{u}$ (вектор измерения). В случае когда вектор измерения зафиксирован и не меняется в ходе рассуждений, скалярное произведение обозначается через $\boldsymbol{ab}$.

[2] Т. е. предполагается, что каждой упорядоченной паре точек A и B поставлен в соответствие один и только один вектор, который обозначается $\overline{AB}$.

D2. Для любых четырех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ $\exists\alpha$, $\exists\beta$, $\exists\gamma$, $\exists\delta$: $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} + \delta\boldsymbol{d} = 0$ $((\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0))$.

Аксиомы скалярного произведения

E1. Если $\boldsymbol{u}$ — некоторый произвольно выбранный ненулевой вектор, то $\forall \boldsymbol{a}$, $\forall \boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{ab}/\boldsymbol{u} = \boldsymbol{ba}/\boldsymbol{u}$.

E2. Если $\boldsymbol{u}$ — некоторый произвольно выбранный ненулевой вектор, то $\forall \boldsymbol{a}$, $\forall \boldsymbol{b}$, $\forall \boldsymbol{c}$: $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}/\boldsymbol{u} = \boldsymbol{ac}/\boldsymbol{u} + \boldsymbol{bc}/\boldsymbol{u}$.

E3. Если $\boldsymbol{u}$ — некоторый произвольно выбранный ненулевой вектор, то $\forall \boldsymbol{a}$, $\forall \boldsymbol{b}$: $(\alpha\boldsymbol{a})\, \boldsymbol{b}/\boldsymbol{u} = \alpha\, (\boldsymbol{ab}/\boldsymbol{u})$.

E4. Если $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{a}$ — произвольно выбранные ненулевые векторы, то $\boldsymbol{aa}/\boldsymbol{u} > 0$.

E5. Если $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — произвольно выбранные ненулевые векторы, то для любого вектора $\boldsymbol{a}$ имеем: $\boldsymbol{aa}/\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{vv}/\boldsymbol{u})\, (\boldsymbol{aa}/\boldsymbol{v})$.

Аксиомы принадлежности

T1. Существует по крайней мере одна точка.

T2. Для произвольной точки A и произвольного вектора $\boldsymbol{a}$ $\exists!\, B : \overline{AB} = \boldsymbol{a}$.

T3. $\forall A$, $\forall B$, $\forall C : \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

В задачах приняты следующие обозначения для систем аксиом. Система, состоящая из аксиом $V1$ — $V7$, обозначается через V. Система, состоящая из аксиом $V1$ — $V7, D1, D2$, обозначается через V_3.

Система, состоящая из аксиом $V1$ — $V7$, $D1$, $D2$, E1 — E5, обозначается через E_3.

Вся система аксиом обозначается через TE_3. Те же обозначения мы сохраняем для пространств, построенных на соответствующих системах.

2. Аксиомы Вейля проективной плоскости P_2

Основными объектами плоскости считаются точки A, B, ... Предполагается, что между ненулевыми векторами пространства V_3 и точками имеется отношение инцидентности (обозначение: $\varkappa$). Основные понятия удовлетворяют следующим аксиомам:

P1. Для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{a}$, $\exists\, A\, (A\varkappa\boldsymbol{a})$.

P2. $\exists A$, $\forall \boldsymbol{a}\, (\boldsymbol{a} \neq 0,\ \boldsymbol{a}\varkappa A)$.

P3. Если $A\varkappa\boldsymbol{a}$, $B\varkappa\boldsymbol{b}$ и $L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0$, то $A \neq B$.

P4. Если $A\varkappa\boldsymbol{a}$, $B\varkappa\boldsymbol{b}$ и $A \neq B$, то $L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0$.

Совокупность всех точек, которые вместе с векторами пространства V_3 удовлетворяют аксиомам P1 — P4, называется *проективной плоскостью* P_2, связанной с векторным пространством V_3.

3. Аксиомы Гильберта (см. [17]).

В задачах приняты следующие обозначения:

Г — вся система аксиом Гильберта для евклидовой геометрии;

Г* — система аксиом Гильберта для евклидовой плоскости;

Г1, Г2, Г3, Г4 — соответственно первая, вторая, третья и четвертая группы аксиом Гильберта;

Г5 — аксиома параллельности Евклида;

Л — аксиома параллельности Лобачевского.

§ 38. Интерпретации различных систем аксиом по Вейлю. Непротиворечивость и независимость

В настоящем параграфе для сокращения записей матрицу с элементами a_{ij} (a_{ij} — действительные числа), имеющую p строк и q столбцов, будем обозначать через A_{pq}. Например, $A_{13} = (a_{11}a_{12}a_{13})$,

$$B_{23} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}, \quad C_{34} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix}, \quad D_{31} = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{pmatrix}.$$

Сумму матриц A_{pq} и B_{pq} будем обозначать через $A_{pq} + B_{pq}$; для произведения матриц примем обычные обозначения, например: $A_{pq} \cdot B_{qr} = C_{pr}$. Матрица, транспонированная матрице A_{pq}, обозначается через A_{qp}.

1. Интерпретации различных систем аксиом

843. Назовем вектором любую квадратную матрицу A_{pp} (p — фиксированное натуральное число); суммой векторов A_{pp} и B_{pp} — матрицу $A_{pp} + B_{pp}$, а произведением числа λ на вектор A_{pp} — матрицу λA_{pp}. Показать, что при этом все аксиомы системы V_3, кроме D_2, выполняются.

844. Сохраним все соглашения задачи 843, за исключением одного: суммой векторов A_{pp} и B_{pp} назовем вектор $A_{pp} \cdot B_{pp}$. Проверить выполнимость аксиом V_1 — V_7.

845. Дополним соглашения, сформулированные в задаче 843: скалярным произведением векторов A_{pp} и B_{pp}, установленным вектором U_{pp}, назовем число

$$\frac{a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{pp}b_{pp}}{u_{11}^2 + u_{22}^2 + \cdots + u_{pp}^2}.$$

Проверить выполнимость аксиом E_1 — E_5.

846. Назовем вектором любую матрицу A_{31}, точкой — любую матрицу M_{13}, суммой векторов A_{31} и B_{31} — вектор $A_{31} + B_{31}$, произведением вектора A_{31} на число λ — вектор λA_{31}. Скалярным произведением векторов A_{31} и B_{31}, установленным вектором U_{31}, назовем число:

$$\frac{a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31}}{u_{11}^2 + u_{21}^2 + u_{31}^2}.$$

Паре точек (m_{11}, m_{12}, m_{13}) и (n_{11}, n_{12}, n_{13}) ставится в соответствие вектор

$$\begin{pmatrix} k(n_{11} - m_{11}) \\ k(n_{12} - m_{12}) \\ k(n_{13} - m_{13}) \end{pmatrix},$$

где k — фиксированное число, отличное от нуля. Показать, что при этом выполняются все аксиомы пространства TE_3.

847. Будут ли выполнены аксиомы пространства TE_3, если в условиях предыдущей задачи точкой будем называть любую матрицу M_{14}, а соответствие точек и векторов определим так: паре точек $(m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{14})$ и $(n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14})$ ставится в соответствие вектор

$$\begin{pmatrix} k(n_{11} - m_{11}) \\ k(n_{12} - m_{12}) \\ k(n_{13} - m_{13}) \end{pmatrix},$$

где k — фиксированное число, отличное от нуля?

848. Будут ли выполнены аксиомы пространства TE_3, если в задаче 846 под вектором будем понимать любую матрицу A_{31} с комплексными элементами, а остальные соглашения об основных понятиях остаются без изменения?

849. Будут ли выполнены аксиомы TE_3, если в условиях задачи 846 соответствие между парой точек и вектором ввести следующим образом: паре точек (m_{11}, m_{12}, m_{13}) и (n_{11}, n_{12}, n_{13}) ставится в соответствие вектор

$$\begin{pmatrix} kn_{11} - lm_{11} \\ kn_{12} - lm_{12} \\ kn_{22} - lm_{22} \end{pmatrix},$$

где k и l — фиксированные различные действительные числа, причем $kl \neq 0$?

850. Вектором назовем любую матрицу A_{31}, суммой векторов A_{31} и B_{31} назовем матрицу $A_{31} + B_{31}$, а произведением вектора A_{31} на число λ назовем матрицу λA_{31}. Точкой назовем всякую систему уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

(Предполагается, что ранг матрицы, образованной из коэффициентов уравнений, равен 2.) Две точки совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их множества решений. Ненулевой вектор A_{31} инцидентен точке (1), если числа a_{11}, a_{21}, a_{31} удовлетворяют системе (1). Показать, что выполняются все аксиомы пространства P_2, связанного с пространством V_3.

851. По аналогии с примером 850 построить интерпретацию проективного пространства P_3, связанного с векторным пространством V_4.

852. Эллиптической плоскостью, связанной с векторным пространством E_3, называется совокупность точек, которые вместе с векторами пространства E_3 удовлетворяют аксиомам P1 — P4 (с. 90). Соглашения, сформулированные в задаче 850, дополним следующим: скалярным произведением векторов A_{31} и B_{31}, установленным вектором U_{31}, называется число

$$\frac{a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21}+a_{31}b_{31}}{u_{11}^2+u_{21}^2+u_{31}^2}.$$

Показать, что полученная таким образом интерпретация является моделью эллиптической плоскости.

853. В трехмерном пространстве, построенном на аксиомах Гильберта, зафиксируем точку O и назовем ее полюсом; «вектором» назовем любую точку пространства, а «точкой» — всякую плоскость, проходящую через полюс. Действия над «векторами» введем так:

$$A+B=\overline{OA}+\overline{OB};\quad \lambda\cdot A=\lambda\overline{OA};\quad A\cdot B=\overline{OA}\cdot\overline{OB},$$

здесь A, B — точки, а λ — действительное число. Ненулевой «вектор» A называется инцидентным «точке» α, если $\overline{OA}\perp\alpha$. Показать, что выполняются все аксиомы эллиптической плоскости (см. задачу 852).

854. Векторное пространство V_3 называется псевдоевклидовым пространством $E_3^{л}$, если в нем определено «псевдоскалярное произведение», которое удовлетворяет аксиомам E1, E2, E3 (см. с. 90) и, кроме того, следующим аксиомам:

E4^{л}. Существует двумерное векторное пространство, в котором для любого ненулевого вектора псевдоевклидовый квадрат положителен.

E5^{л}. Существует хотя бы один гиперболический вектор, т. е. вектор, псевдоевклидовый квадрат которого отрицателен.

Построить интерпретацию псевдоевклидова пространства, назвав вектором этого пространства любую матрицу A_{31}.

855. Гиперболической плоскостью, связанной с пространством $E_3^{л}$ (см. задачу 854), называется совокупность точек, которые с гиперболическими векторами удовлетворяют аксиомам P1 — P4. В формулировках аксиом P1 — P4 слово «вектор» следует заменить словом «гиперболический вектор» (с. 90). Соглашения, сформулированные в задаче 850, дополним следующим: псевдоскалярным произведением векторов $\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{21}\\b_{31}\end{pmatrix}$ называется число, равное $a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21}-a_{31}b_{31}$.

Показать, что выполняются все аксиомы гиперболической плоскости.

2. Непротиворечивость и независимость аксиоматики пространства TE_3

856. Пользуясь задачей 846, доказать, что система аксиом TE_3 непротиворечива.

857. Показать, что в системе аксиом TE_3 каждая из аксиом D1 и D2 не зависит от остальных аксиом.

858. Показать, что в системе аксиом TE_3 аксиома E5 не зависит от остальных аксиом.

859. Доказать, что в системе аксиом TE_3 аксиома T2 не зависит от остальных аксиом.

860. Доказать, что в системе аксиом TE_3 аксиома T3 не зависит от остальных аксиом.

861. Видоизменяя аксиомы D1 — D2 в системе аксиом TE_3, сформулировать аксиоматику n-мерного точечно-векторного пространства TE_n. По аналогии с задачей 846 построить интерпретацию аксиоматики TE_n и тем самым доказать ее непротиворечивость.

§ 39. Обоснование евклидовой геометрии по Вейлю

1. Скалярное произведение векторов; модуль вектора

862. Показать, что если $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — произвольные ненулевые векторы, выбранные в качестве векторов измерения, то для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеет место соотношение: $\boldsymbol{ab}/\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{vv}/\boldsymbol{u})\,(\boldsymbol{ab}/\boldsymbol{v})$.

863. Показать, что если $\boldsymbol{u}$ — ненулевой вектор, то $\boldsymbol{uu}/\boldsymbol{u} = 1$.

864. Два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются ортогональными, если при некотором выборе вектора измерения $\boldsymbol{u}$ имеем: $\boldsymbol{ab}/\boldsymbol{u} = 0$. Показать, что условие ортогональности не зависит от выбора вектора измерения.

865. Модулем вектора $\boldsymbol{a}$, установленным вектором $\boldsymbol{u}$, называется число $\sqrt{\boldsymbol{aa}/\boldsymbol{u}}$ и обозначается через [1] $|\boldsymbol{a}|_u$. Установить связь между модулем одного и того же вектора при различном выборе векторов измерения.

866. Вектор $\boldsymbol{a}$ называется единичным, если $|\boldsymbol{a}|_u = 1$. Доказать следующие предложения:

а) вектор измерения является единичным вектором;

б) пусть $\boldsymbol{u}$ — вектор измерения. Если $\boldsymbol{v}$ — единичный вектор, то для любого вектора $\boldsymbol{a}$ имеем: $|\boldsymbol{a}|_u = |\boldsymbol{a}|_v$.

867. Показать, что если при данном выборе вектора измерения модули векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равны, то для любого вектора $\boldsymbol{x}$ имеем: $|\boldsymbol{x}|_a = |\boldsymbol{x}|_b$.

868. Показать, что если $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$, то при любом выборе вектора измерения $\boldsymbol{u}$ имеем: $|\boldsymbol{a}|_u = |\alpha|\,|\boldsymbol{b}|_u$.

869. Ненулевые векторы называются сонаправленными, если они коллинеарны и их отношение есть положительное число. Показать, что каждое из следующих условий является необходимым и достаточным для того, чтобы ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ были сонаправлены:

а) $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$;

б) $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.

---

[1] В случае, когда вектор измерения зафиксирован и не меняется в ходе рассуждений, модуль вектора $\boldsymbol{a}$ обозначается через $|\boldsymbol{a}|$.

870. Показать, что для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеет место соотношение: $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.

2. Свойства треугольников

871. Показать, что в любом треугольнике ABC имеет место соотношение:

$$|AC| < |AB| + |BC|.$$

872. Показать, что в любом треугольнике ABC имеет место соотношение:

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2|AB||AC|\cos A.$$

873. Показать, что в любом треугольнике ABC имеет место соотношение:

$$|BC| = |BA|\cos B + |CA|\cos C.$$

874. Доказать, что у равнобедренного треугольника углы при основании равны. Сформулировать и доказать обратное предложение.

875. Доказать, что если в треугольнике ABC имеем: $|AB| > |AC|$, то $\angle C > \angle B$.

876. Доказать, что прямые, содержащие высоты любого треугольника, пересекаются в одной точке.

877. Доказать, что все точки биссектрисы угла равноудалены от сторон угла. Пользуясь этим, показать, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

878. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

3. Некоторые теоремы стереометрии

879. Если a и b — две различные параллельные прямые, а α и β — две пересекающиеся плоскости, удовлетворяющие условию: $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, то плоскости α и β пересекаются по прямой, параллельной прямым a и b. Доказать.

880. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии пересечения параллельны. Доказать.

881. Доказать теорему: плоскость α единственным образом разбивает все точки пространства, не принадлежащие плоскости, на два множества так, что если точки A и B принадлежат одному множеству, то отрезок AB не пересекает плоскость, а если разным множествам, то этот отрезок пересекает плоскость. Пользуясь этим предложением, ввести понятие полупространства.

882. По аналогии с понятием угла ввести понятие двугранного угла и понятия внутренней и внешней областей угла.

Доказать, что если один конец отрезка принадлежит внутренней области, а другой конец — внешней, то отрезок пересекает грани или ребро этого угла.

883. Две плоскости, параллельные между собой и не параллельные ребру двугранного угла, пересекают его по двум конгруэнтным углам. Доказать.

884. Доказать теорему о трех перпендикулярах: пусть l — прямая, не перпендикулярная плоскости α, а l' — проекция этой прямой на плоскость. Если $m \subset \alpha$ и $m \perp l'$, то $m \perp l$. Обратно: если $m \subset \alpha$ и $m \perp l$, то $m \perp l'$.

885. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые. Доказать: $\exists! \alpha$ $(\alpha \supset a,\ \alpha \parallel b)$.

886. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые. Доказать, что существует одна и только одна прямая, которая пересекает данные прямые и ортогональна им обеим.

§ 40. Интерпретации аксиом евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского по Гильберту. Независимость аксиом

1. Различные интерпретации

887. Убедиться в том, что в интерпретации, описанной ниже, выполняются все аксиомы системы Г*1, Г2, Г4.

а) Точкой называется пара действительных чисел (x, y), взятых в определенном порядке.

б) Прямой называется всякое уравнение вида $kx - y + b = 0$ или $-x + b = 0$, где k и b — произвольные действительные числа.

в) Пусть различные точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) принадлежат одной прямой; точка (x_2, y_2) называется лежащей между (x_1, y_1) и (x_3, y_3), если при $x_2 - x_3 \neq 0$ $\dfrac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3} > 0$, а при $x_2 = x_3$: $\dfrac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3} > 0$.

888. Точкой называется каждая из следующих троек чисел: (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). Числа, определяющие точку, назовем ее координатами.

Прямой назовем каждую из следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y + z - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ x + z - 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 0, \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Плоскостями назовем следующие четыре уравнения:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z - 1 = 0.$$

Точка принадлежит прямой тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнениям, определяющим прямую. Аналогично определяется принадлежность точки и плоскости.

Показать, что в построенной интерпретации выполняются все аксиомы группы Г1.

889. На проективной плоскости дана овальная линия второго порядка, которая называется абсолютом. Внутренние точки абсолюта называются *Л*-точками, а хорды абсолюта — *Л*-прямыми. *Л*-точка принадлежит *Л*-прямой тогда и только тогда, когда проективная точка принадлежит соответствующей хорде абсолюта. Две фигуры F и F' называются конгруэнтными, если существует такая автоморфная коллинеация относительно абсолюта, которая переводит фигуру F в фигуру F'. Показать, что в построенной интерпретации выполняются аксиомы планиметрии Лобачевского, т. е. аксиомы Г*1, Г2, Г3, Г4, Л. Эта модель называется интерпретацией Клейна плоскости Лобачевского.

890. Доказать, что взаимно перпендикулярные прямые плоскости Лобачевского в интерпретации Клейна (см. задачу 889) изображаются хордами, принадлежащими полярно сопряженным прямым относительно абсолюта.

891. На евклидовой плоскости дана окружность (абсолют), внутренние точки которой вместе с точками окружности обозначим через Ω. *Л*-точки, *Л*-прямые и принадлежность *Л*-точек и *Л*-прямых определяются так же, как и в задаче 889. Взаимно-однозначное преобразование точек множества Ω называется *Л*-движением, если оно точки абсолюта переводит в точки абсолюта, любую хорду абсолюта переводит в хорду абсолюта и сохраняет сложное отношение четырех точек. Фигура F называется конгруэнтной фигуре F', если существует такое *Л*-движение, которое фигуру F переводит в фигуру F'. Показать, что в построенной интерпретации выполняются все аксиомы Г*1, Г2, Г3 и Л.

892. На евклидовой плоскости дана окружность радиуса 1 (абсолют), внутренние точки которой обозначим через Ω_0, *Л*-точкой назовем всякую точку множества Ω_0, *Л*-прямой —пересечение любой окружности, ортогональной абсолюту, с множеством Ω_0, а также все диаметры абсолюта. Каждой хорде абсолюта поставим в соответствие *Л*-прямую, опирающуюся на эту хорду. Доказать, что при этом соответствии пучок хорд с центром в *Л*-точке M переходит в пучок *Л*-прямых с центром в некоторой другой точке $M' = f(M)$.

893. В условиях предыдущей задачи обозначим через T соответствие, переводящее каждую хорду абсолюта в *Л*-прямую, а каждую *Л*-точку M в точку $M' = f(M)$. Соответствие T интерпретацию, описанную в примере 891, переводит в новую интерпретацию, которая называется *общей интерпретацией Пуанкаре*. Доказать, что в этой интерпретации выполняются все аксиомы планиметрии Лобачевского.

894. Доказать, что в общей интерпретации Пуанкаре (см. задачу 893) перпендикулярные прямые плоскости Лобачевского интерпретируются дугами взаимно ортогональных окружностей, каждая из которых ортогональна абсолюту и расположена внутри абсолюта.

895. Доказать, что окружность, орицикл и эквидистанта в общей интерпретации Пуанкаре изображаются множествами *Л*-точек, принадлежащих окружности, соответственно не пересекающей абсолют, касающейся абсолюта и пересекающей абсолют под углом, отличным от прямого.

896. Дана общая интерпретация Пуанкаре П (см. задачу 893). Обозначим через S инверсию с центром в произвольной точке абсолюта. Соответствие S интерпретацию П переводит в новую интерпретацию, которая называется частной интерпретацией Пуанкаре. Выяснить, как в этой интерпретации будут реализованы неопределяемые понятия геометрии Лобачевского, а также понятия параллельных прямых, расходящихся прямых и ортогональных прямых.

2. Исследование аксиом Гильберта

897. Показать, что в системе аксиом Гильберта каждое из следующих предложений эквивалентно аксиоме параллельности:

а) сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым;

б) если различные прямые a и b не перпендикулярны, то перпендикуляр, проведенный в любой точке прямой a, пересекает прямую b;

в) каковы бы ни были три различные прямые, всегда существует прямая, отличная от данных прямых и пересекающая все три прямые в трех различных точках;

г) существует четырехугольник с четырьмя прямыми углами;

д) существуют три различные коллинеарные точки, равноудаленные от данной прямой;

е) существуют два подобных, но не конгруэнтных треугольника;

ж) через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит окружность;

з) угол, под которым виден диаметр окружности из какой-либо точки этой окружности, конгруэнтен прямому углу;

и) перпендикуляры, проведенные к серединам сторон любого треугольника, пересекаются в одной точке.

898. Можно ли, пользуясь аксиомами группы Г1, доказать следующие предложения:

а) в пространстве существует более четырех точек;

б) на прямой существует более двух точек?

899. Видоизменяя интерпретацию системы Г1, данную в задаче 888, построить интерпретацию, в которой выполняются все аксиомы Г1, за исключением первой.

900. Пусть I — некоторая интерпретация системы аксиом Гильберта. Построить новую интерпретацию I' следующим образом.

В интерпретации I' все основные понятия, встречающиеся в аксиомах, определяются так же, как и в интерпретации I, за исключением конгруэнтности отрезков. В I' любые два отрезка считаются конгруэнтными. Будет ли I' интерпретацией системы аксиом Γ?

901. Доказать, что в системе Γ аксиома III_5 не зависит от остальных аксиом.

§ 41. Задачи на доказательство в плоскости Лобачевского

Предполагается, что задачи, помещенные в этом параграфе, решаются на основе аксиом Г*1, Г2, Г3, Г4 и Л. Параллельные прямые предполагаются направленными.

902. Пусть $(U_1V_1) \parallel (U_2V_2)$. Доказать, что если прямая UV лежит между (U_1V_1) и (U_2V_2) и не пересекает ни одну из них, то она параллельна данным прямым.

903. Пусть (AA') и (BB') — две различные прямые. Прямая AB называется прямой равного наклона этих прямых, если $\angle BAA' \cong \cong \angle ABB'$, точки A' и B' лежат по одну и ту же сторону от прямой AB. Доказать предложения:

а) любые две прямые равного наклона на непересекающихся прямых AA' и BB' отсекают конгруэнтные отрезки;

б) через каждую точку одной из двух данных непересекающихся прямых AA' и BB' проходит одна и только одна прямая равного наклона.

Справедливы ли эти предложения, если прямые AA' и BB' пересекаются?

904. Доказать предложения:

а) если $(AA') \parallel (BB')$ и (AB) — прямая равного наклона этих прямых, то перпендикуляр, восставленный в середине отрезка AB, параллелен прямым AA' и BB';

б) множество середин всех отрезков равного наклона двух параллельных прямых принадлежит прямой, параллельной данным прямым.

905. Пусть (AA'), (BB') и (CC') — различные попарно параллельные прямые. Доказать, что если (AB) — прямая равного наклона прямых AA' и BB', а (BC) — прямая равного наклона прямых BB' и CC', то (AC) — прямая равного наклона для прямых AA' и CC'.

906. Пусть $\angle ABC$ — произвольный острый угол. Показать, что всегда существует прямая, параллельная сторонам $\angle ABC$, т. е. существует такая прямая UV, что $(BA) \parallel (UV)$ и $(BC) \parallel (VU)$.

907. Пусть $(AA') \parallel (BB')$. Показать, что существует одна и только одна прямая l, перпендикулярная прямой BB' и параллельная $(A'A)$.

908. Пусть (AB) — общий перпендикуляр двух расходящихся прямых a и b, причем $A \in a$, $B \in b$. Доказать следующие предложения:

а) если $P \in a$, $Q \in a$ и эти точки симметричны относительно (AB), то отрезки перпендикуляров, проведенных из этих точек на прямую b, конгруэнтны;

б) множество оснований перпендикуляров, опущенных из всех точек прямой a на прямую b, есть открытый отрезок с серединой в точке B;

в) $[AB]$ — наименьший из отрезков, соединяющих точки на прямых a и b.

909. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ углы A и D прямые. Доказать предложения:

а) если $[CD] \cong [AB]$, то $\angle B \cong \angle C$;

б) если $|CD| > |AB|$, то $\angle B > \angle C$.

Сформулировать и доказать предложения, обратные предложениям а) и б).

910. Пусть $ABCD$ — четырехугольник Саккери с прямыми углами A и D и боковыми сторонами AB и CD ($[AB] \cong [CD]$). Доказать следующие предложения:

а) $\angle B \cong \angle C < d$, где d — прямой угол;

б) прямая, соединяющая середины оснований AD и BC, перпендикулярна этим основаниям;

в) основания AD и BC принадлежат расходящимся прямым;

г) основание AD меньше основания BC.

911. На сторонах угла BOA взяты точки B' и A' так, что B лежит между O и B', а A лежит между O и A'. Доказать, что дефект треугольника OAB меньше дефекта треугольника $OA'B'$.

912. Доказать теорему: если серединные перпендикуляры двух сторон треугольника расходятся, то серединный перпендикуляр третьей стороны расходится с каждым из них и существует прямая, которая перпендикулярна всем трем серединным перпендикулярам.

913. Доказать теорему: если серединные перпендикуляры двух сторон треугольника параллельны, то серединный перпендикуляр третьей стороны параллелен им обоим.

914. Доказать, что на плоскости Лобачевского существуют треугольники, удовлетворяющие условиям: серединные перпендикуляры сторон принадлежат пучку: а) пересекающихся прямых; б) параллельных прямых; в) расходящихся прямых [1].

915. Показать, что у всех треугольников, имеющих данный угол α при вершине A, высоты h_a ограничены неравенством: $h_a < \tilde{p}$, где $\Pi(\tilde{p}) = \frac{\alpha}{2}$. В частности, у всех прямоугольных треугольников высоты, опущенные из вершин прямого угла, ограничены.

916. Доказать, что угол, под которым виден диаметр $[AB]$ окружности из любой точки этой окружности, не совпадающей с концами диаметра, меньше прямого угла.

917. Доказать, что существует «треугольник с нулевыми углами», т. е. существуют три прямые AA', BB' и CC', удовлетворяющие условиям: $(AA') \parallel (C'C)$, $(A'A) \parallel (BB')$, $(B'B) \parallel (CC')$.

918. Доказать, что любые два треугольника с нулевыми углами (см. предыдущую задачу) конгруэнтны.

---

[1] Так называется совокупность всех прямых, перпендикулярных некоторой прямой плоскости.

§ 42 *. Задачи на построение на различных моделях плоскости Лобачевского

1*. Интерпретация Клейна[1]

Во всех задачах этого пункта построения выполняются на проективной плоскости при помощи одной линейки. При этом предполагается, что все точки абсолюта являются построенными точками.

919. Дан отрезок. Построить угол параллельности, соответствующий этому отрезку.

920. Дан угол, построить отрезок так, чтобы данный угол был углом параллельности, соответствующим этому отрезку.

921. Дан угол (k, l) с вершиной A и луч k' (см. задачу 889) с началом A'. Построить луч l' так, чтобы угол (k, l) был конгруэнтен углу (k', l').

922. Дан отрезок AB и луч k', исходящий из точки A'. На луче k' найти такую точку B', чтобы $[AB] \cong [A'B']$.

923. Дан отрезок AB. Построить середину этого отрезка.

924. Построить биссектрису данного угла (k, l).

925. Дан угол (h, k). Построить луч l так, чтобы луч k был биссектрисой угла (h, l).

926. Даны две расходящиеся прямые U_1V_1 и U_2V_2. Построить общий перпендикуляр данных прямых.

2*. Общая интерпретация Пуанкаре[2]

Во всех задачах этого пункта построения выполняются при помощи циркуля и линейки на евклидовой плоскости; абсолют задан в виде построенной окружности. В формулировках задач под «прямой UV» понимается дуга окружности, ортогональная абсолюту, ее концы—точки U и V, лежащие на абсолюте, или диаметр абсолюта с концами U и V на абсолюте.

927. Даны две точки A и B. Построить прямую, проходящую через эти точки.

928. Дана точка A и прямая UV, не проходящая через эту точку. Через точку A провести прямую, параллельную прямой UV.

929. Построить прямую, проходящую через данную точку A и перпендикулярную данной прямой a.

930. Дана точка A и прямая UV. Построить орицикл, проходящий через данную точку, для которого данная направленная прямая является осью.

931. Даны две точки A и B. Построить орицикл, проходящий через данные точки.

932. Даны две точки A и O. Построить окружность плоскости Лобачевского, проходящую через точку A с центром в точке O.

---

[1] См. задачу 889.

[2] См. задачу 893.

933. Дана точка A и две расходящиеся прямые. Построить эквидистанту, проходящую через точку A, для которой данные прямые являются осями.

3*. Частная интерпретация Пуанкаре

На евклидовой плоскости с помощью циркуля и линейки выполнить построения, указанные в задачах 927—933, в частной интерпретации Пуанкаре (см. задачу 896). При этом предполагается, что дана построенная прямая в качестве абсолюта и зафиксирована одна из полуплоскостей, определяемая абсолютом, в которой расположены объекты, изображающие точки и прямые плоскости Лобачевского.

Глава X

КРИВЫЕ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Настоящая глава посвящена задачам на теорию кривых в евклидовом пространстве TE_3. Так как в учебной литературе нет единообразия при изложении понятия кривой[1], то поэтому в начале § 43 дано краткое введение, которым следует руководствоваться при решении задач 934—938 и 944—952. При решении остальных задач этой главы можно пользоваться любым определением кривой, встречающимся в учебной литературе.

Мы будем предполагать, что все рассматриваемые функции одного скалярного аргумента — векторные, точечные или скалярные — заданы на числовых промежутках. Промежутком будем называть любой числовой сегмент, а также любой интервал или полуинтервал с конечными или бесконечными границами[2]. Промежутки будем обозначать через $a \leqslant t \leqslant b$, $a \leqslant t < \infty$, ... и т. д. или I_0, I_1, ... и т. д.

Во всех задачах этой главы, в которых точки заданы координатами или кривые уравнениями, предполагается, что в пространстве выбрана прямоугольная декартова система координат. Координатные векторы обозначаются через i, j и k.

§ 43. Понятие кривой; длина дуги

Путем l, заданным на промежутке I_0, называется непрерывное отображение f какого-либо числового промежутка I_0 в множество L точек пространства TE_3, т. е. f: $I_0 \to L$. Если f является гомеоморфизмом, то l — **простой путь**. Если в пространстве TE_3 введена прямоугольная декартова система координат, то отображение $f(t)$, где $t \in I_0$, $f(t)$ — точка M ($M \in L$), может быть задано координатами

---

[1] См., например, учебники [37], [45], [46].

[2] Т. е. множества чисел t, удовлетворяющих условиям: $a \leqslant t \leqslant b$, $a < t \leqslant b$, $a \leqslant t < b$, $-\infty < t < \infty$, $a \leqslant t < \infty$ $a < t < \infty$, $-\infty < t < b$, $-\infty < t \leqslant b$, где $a < b$.

точки M или радиусом-вектором этой точки:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t); \tag{1}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \tag{2}$$

где $t \in I_0$. Эти соотношения называются соответственно координатным и векторным параметрическим представлением пути l.

Путь l, заданный на промежутке I_0 векторным параметрическим представлением (2), называется регулярным, если функция (2) — класса $C^1(I_0)$ и во всех точках t промежутка I_0 имеем: $\boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{0}$.

Скалярная функция от скалярного аргумента

$$t = \varphi(u), \tag{3}$$

заданная на промежутке I_0, называется допустимым изменением параметра, если эта функция принадлежит классу $C^1(I_0)$ и $\frac{d\varphi}{du} \neq 0$ во всех точках промежутка I_0.

Два пути l_1 и l_2, заданных соответственно на промежутках I_1 и I_2, эквивалентны, если при одном и том же выборе полюса их параметрические представления $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1(t)$, $t \in I_1$ и $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2(u)$, $u \in I_2$ удовлетворяют условию: на промежутке I_2 существует такое допустимое изменение параметра $t = t(u)$, что $I_1 = t(I_2)$ и, кроме того, $\boldsymbol{r}_1(t(u)) = \boldsymbol{r}_2(u)$. Класс эквивалентных между собой путей называется кривой; класс эквивалентных между собой регулярных путей называется регулярной кривой [1].

Всякая кривая L' вполне определяется заданием хотя бы одного пути l из класса эквивалентных путей, характеризующих данную кривую L. Поэтому, если (2) — параметрическое представление пути l, то мы будем говорить, что кривая L задана векторной функцией (2) или что функция (2) является векторным параметрическим представлением кривой L. Аналогично будем говорить, что кривая L задана скалярными функциями (1) или (1) является параметрическим представлением кривой в координатах.

1. Понятие пути; допустимые изменения параметра

934. Показать, что следующие функции являются допустимыми изменениями параметров. Определить промежутки, в которые переходят области определения данных функций:

а) $t = (b-a)u + a$, $a < b$, $0 \leqslant u \leqslant 1$;

б) $t = \dfrac{u-a}{b-a}$, $a < b$, $a \leqslant u \leqslant b$;

в) $t = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}u\right)$, $0 \leqslant u < 1$;

г) $t = \dfrac{u^2}{u^2+1}$, $0 < u < \infty$;

[1] В учебной литературе определенный нами образ иногда называется простой кривой.

д) $t = \operatorname{arctg} u$, $-\infty < u < \infty$;

е) $t = -\frac{(u-a)}{b-a} + 1$, $a < u \leqslant b$.

935. Показать, что существуют допустимые изменения параметров $t = \varphi(u)$, которые переводят каждый из следующих промежутков: $a \leqslant u \leqslant b$; $a \leqslant u < b$; $a < u \leqslant b$; $a < u < b$ — в один из промежутков: $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant t < 1$, $0 < t < 1$.

936. Показать, что существуют допустимые изменения параметров, которые переводят каждый из следующих промежутков: $a \leqslant u < \infty$, $a < u < \infty$, $-\infty < u \leqslant b$, $-\infty < u < b$, $-\infty < u < \infty$ — в один из промежутков: $0 \leqslant t < 1$, $0 < t < 1$.

937. Даны параметрические представления четырех путей:

$$(l_1)\colon\ x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ z = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\ a \neq 0,\ b \neq 0);$$

$$(l_2)\colon\ x = a\cos(u^3+1),\ y = a\sin(u^3+1),\ z = 0$$

$$(-1 \leqslant u \leqslant \sqrt[3]{2\pi - 1},\ a \neq 0);$$

$$(l_3)\colon\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 4\pi);$$

$$(l_4)\colon\ x = \cos u^2,\ y = \sin u^2,\ z = 2u \qquad (0 \leqslant u \leqslant 2\pi).$$

Доказать предложения:

а) все пути l_1, l_2, l_3 и l_4 регулярны;

б) пути l_1 и l_2 эквивалентны;

в) пути l_3 и l_4 не эквивалентны;

г) пути l_1 и l_3 не эквивалентны.

938. Даны параметрические представления путей l_1 и l_2:

$$(l_1)\colon\ x = t^2,\ y = t,\ z = t^4 \qquad (-1 \leqslant t \leqslant 1);$$

$$(l_2)\colon\ x = u^6,\ y = u^3,\ z = u^{12} \qquad (-1 \leqslant u \leqslant 1).$$

Выяснить, регулярны ли эти пути.

2. Уравнения кривой; регулярные кривые

939. В каждом из следующих примеров показать, что кривая L, заданная параметрически, совпадает с кривой L', заданной уравнениями в декартовых координатах[1]:

а) (L): $x = t$, $y = t$, $z = 2t^2$;

(L'): $z = x^2 + y^2$, $y = x$.

б) (L): $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$;

(L'): $3y - x^2 = 0$, $27z - 2x^3 = 0$.

в) (L): $x = t$, $y = \frac{t^2}{3}$, $z = \frac{t^3}{27}$;

(L'): $x^2 = 3y$, $xy = 9z$.

---

[1] Здесь и в дальнейшем пределы изменения параметра не будут указываться, если параметр изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

г) (L): $x = t^2,\ y = t,\ z = t^4$;

(L'): $x = y^2,\ z = x^2$.

940. В каждом из следующих примеров выяснить, совпадает ли кривая L, заданная параметрически, с кривой L', заданной уравнениями в декартовых координатах:

а) (L): $x = t,\ y = \frac{1}{t},\ z = \frac{t^2}{3}$ $\quad (0 < t < \infty)$;

(L'): $x^2 - 3z = 0,\ xy = 1$.

б) (L): $x = t,\ y = \frac{t^3}{2a^2},\ z = \frac{a^2}{2t}$;

$(-\infty < t < 0,\ 0 < t < \infty,\ a \neq 0)$,

(L'): $2a^2y - x^3 = 0,\ 2xz = a^2$.

в) (L): $x = t^3,\ y = \frac{t^9}{2a^2},\ z = \frac{a^2}{2t^3}$;

$(-\infty < t < 0,\ 0 < t < \infty,\ a \neq 0)$,

(L'): $2a^2y - x^3 = 0,\ 2xz = a^2$.

г) (L): $x = t,\ y = t^2,\ z = e^t$;

(L'): $y = x^2,\ z = e^x$.

д) (L): $x = t^3,\ y = t^2,\ z = t$;

(L'): $xz - y^2 = 0,\ z^2 - y = 0$.

941. Показать, что соотношения:

а) $x = \cos u,\ y = \sin u,\ (-\pi \leqslant u \leqslant \pi)$,

б) $x = \frac{t^4 - 6t^2 + 1}{(t^2+1)^2},\ y = \frac{4t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}$,

$(-1 \leqslant t \leqslant 1)$.

являются различными параметрическими представлениями одной и той же окружности, лежащей в плоскости XOY.

942. Пусть L — пересечение цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 1$ с плоскостью $x + y + z = 1$. Написать параметрическое представление множества L, не содержащее радикалов.

943. Пусть L — пересечение цилиндрических поверхностей $z^2 = x$ и $y^2 = 1 - x$. Написать параметрическое представление множества L, не содержащее радикалов.

944. Показать, что кривая $x = t,\ y = t^2 + 1,\ z = (t-1)^3$ регулярна. Написать уравнения проекций этой кривой на плоскости XOY и XOZ.

945. Показать, что кривая $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + (t^2+2)\boldsymbol{j} + (t^3+t)\boldsymbol{k}$ является регулярной. Определить проекции этой линии на плоскости XOY и YOZ.

946. Доказать, что кривая

$$x=\frac{t}{1+t^2+t^4},\quad y=\frac{t^2}{1+t^2+t^4},\quad z=\frac{t^3}{1+t^2+t^4}$$

является регулярной и лежит на сферической поверхности с центром в точке $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$. Определить радиус сферической поверхности.

947. Доказать, что кривая

$$x=t^2\cos t,\ y=t^2\sin t,\ z=t^2,\qquad (0<t<\infty)$$

регулярна и лежит на конической поверхности. Определить угол φ_0 между этой кривой и образующей конуса в точке M_0 с параметром $2\sqrt{6}$.

948. Показать, что кривая

$$x=1+\cos t,\ y=\sin t,\ z=2\sin\frac{t}{2},\qquad (-2\pi\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

регулярна и лежит на сфере с центром в начале координат и радиусом 2 и на цилиндрической поверхности $(x-1)^2+y^2=1$.

949. Доказать, что кривая $x=a\operatorname{tg} t,\ y=b\cos t,\ z=b\sin t,\ \left(0\leqslant t<\frac{\pi}{2},\ a\neq 0 \text{ и } b\neq 0\right)$ лежит на гиперболическом параболоиде и пересекает прямолинейные образующие одного из семейств под прямым углом.

950. Показать, что кривая

$$\boldsymbol{r}=\begin{cases} t\boldsymbol{i}+e^{-\frac{1}{t^2}}\boldsymbol{k} & \text{при } -\infty<t<0,\\ 0 & \text{при } t=0,\\ t\boldsymbol{i}+e^{-\frac{1}{t^2}}\boldsymbol{j} & \text{при } 0<t<\infty \end{cases}$$

является регулярной кривой класса C^∞.

951. Дано параметрическое представление кривой L на плоскости:

$$x=t^2,\quad y=\begin{cases} 0 & \text{если } t\leqslant 0,\\ t^2\sin\frac{1}{t} & \text{если } t>0, \end{cases}$$

где $-\infty<t<\infty$.

Показать, что функции, определяющие кривую, имеют непрерывные производные для всех t, однако кривая не регулярна.

952. Уравнение циссоиды Диоклеса в полярных координатах имеет вид:

$$r=2\sin\varphi\operatorname{tg}\varphi.$$

Записать параметрическое представление кривой и убедиться в том, что она не регулярна на интервале $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

3. Длина дуги; естественная параметризация

953. Вычислить длину дуги кривой

$$x=\frac{a}{2}(e^t+e^{-t}),\ y=\frac{a}{2}(e^t-e^{-t})+b,\ z=at+c, \qquad (a\neq 0),$$

заключенной между точками M_1 $(t_1=0)$ и M_2 $(t_2=1)$.

954. Дана плоская кривая

$$x=a(u-\sin u),\ y=a(1-\cos u).$$

$(a\neq 0)$. Вычислить длину дуги этой кривой, заключенной между точками M_1 $(u=0)$ и M_2 $\left(u=\frac{\pi}{2}\right)$.

955. Дана кривая в плоскости XOY уравнением: $y=\ln\cos x$. Вычислить длину дуги этой кривой, заключенной между точками $x=0$ и $x=\frac{\pi}{3}$.

956. Вычислить длину дуги винтовой линии

$$\boldsymbol{r}=a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}+bt\boldsymbol{k}.$$

$(a\neq 0, b\neq 0)$, заключенной между точками M_1 $(t_1=0)$ и M_2 $(t_2=2\pi)$.

957. Вычислить длину дуги кривой

$$x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ z=e^t,$$

заключенной между точками M_1 $(t_1=0)$ и M_2 $(t_2=\pi)$.

958. Винтовая линия задана скалярными функциями:

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt.$$

Записать ее уравнения в естественной параметризации.

959. Кривая L задана векторной функцией

$$\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}(t+\sqrt{t^2+1})\boldsymbol{i}+\frac{1}{2(t+\sqrt{t^2+1})}\boldsymbol{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(t+\sqrt{t^2+1})\boldsymbol{k}.$$

Показать, что параметризация t является естественной.

960. Записать в естественной параметризации уравнения кривой:

$$x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ z=e^t.$$

§ 44. Сопровождающий трехгранник кривой

1. Касательная к кривой; соприкасающаяся плоскость

961. Кривая задана параметрически:

$$x=\frac{t^4}{4},\quad y=\frac{t^3}{3},\quad z=\frac{t^2}{2}\qquad (0<t<\infty).$$

Написать уравнения: а) касательной в точке $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$; б) касательной, параллельной плоскости $x+3y+2z=0$.

962. Найти точку пересечения касательной к кривой

$$x = 1 + t,\ y = -t^2,\ z = 1 + t^3$$

в точке $t = 1$ с плоскостью XOY.

963. Найти линию, по которой касательные к кривой

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = e^t$$

пересекают плоскость XOY.

964. Доказать, что касательные к кривой

$$x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3$$

образуют постоянный угол φ_0 с некоторым ненулевым вектором. Определить угол φ_0 и вектор неизменного направления $\boldsymbol{p}$.

965. В пространстве дана кривая:

$$x^2 = 3y,\ 2xy = 9z.$$

Доказать, что касательные к кривой во всех ее точках образуют постоянный угол φ_0 с вектором $\boldsymbol{p}\ (1,\ 0,\ 1)$. Определить угол φ_0.

966. Доказать, что кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(s)$, принадлежащая классу $C^2\,[a,\ b]$, является отрезком или прямой линией, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

а) все касательные проходят через одну и ту же точку A;

б) все касательные параллельны между собой.

967. Написать уравнение соприкасающейся плоскости кривой

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ z = e^t$$

в точке $(a,\ 0,\ 1)$, $(a \neq 0,\ b \neq 0)$.

968. Написать уравнение соприкасающейся плоскости кривой

$$x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = t\sqrt{2}$$

в произвольной точке.

969. Доказать, что соприкасающиеся плоскости винтовой линии

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,$$

$(a \neq 0,\ b \neq 0)$ образуют с координатной плоскостью XOY постоянный угол φ_0. Определить этот угол.

970. Доказать следующую теорему: если соприкасающиеся плоскости в различных точках $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_k$ (где $k > 3$) винтовой линии (см. задачу 969) проходят через некоторую фиксированную точку, то точки $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_k$ компланарны.

971. Доказать, что если все соприкасающиеся плоскости кривой класса $\geqslant 2$ проходят через одну и ту же точку, то кривая плоская.

2. Сопровождающий трехгранник кривой

972. Написать уравнения нормальной плоскости кривой $z = x^2 + y^2,\ y = x$ в точке $(3,\ 3,\ 18)$.

973. Показать, что нормальные плоскости кривой

$$x = a\sin^2 t,\ y = a\sin t\cos t,\ z = a\cos t \qquad (0 \leqslant t < 2\pi)$$

проходят через начало координат.

974. Доказать, что главные нормали кривой $x = t$, $y = \sin t$, $z = -\cos t$ во всех ее точках параллельны плоскости YOZ.

975. Найти уравнения главной нормали и бинормали кривой $x = y^2$; $z = x^2$ в точке $(1, 1, 1)$.

976. Найти уравнение спрямляющей плоскости кривой

$$x = \frac{t^2}{2}, \quad y = \frac{2t^3}{3}, \quad z = \frac{t^4}{2}$$

в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

977. Написать уравнение главной нормали кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = e^t$, $-\infty < t < \infty$, в точке $(0, 0, 1)$.

978. Показать, что все нормальные плоскости кривой

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 2\sin\frac{t}{2}, \qquad (0 \leqslant t < 2\pi),$$

проходят через некоторую фиксированную точку пространства. Определить координаты этой точки.

979. Доказать, что винтовая линия $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $(a \neq 0,\ b \neq 0)$, лежит на цилиндре и главная нормаль в каждой точке линии перпендикулярна оси цилиндра.

980. Дана кривая $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$. Доказать, что одна из биссектрис углов между касательной и бинормалью к этой кривой в любой ее точке имеет постоянное направление.

981. Для кривой $x = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(t^2 + \frac{1}{2}t^4\right)$, $y = \frac{1}{3}t^3$, $z = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(t^2 - \frac{1}{2}t^4\right)$ написать уравнения ребер и граней подвижного сопровождающего трехгранника в точке $M_0\,(t_0 = 1)$.

982. Доказать, что все бинормали кривой $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$, $z = e^{-\frac{t^2}{2}}$ пересекают ось OZ.

983. Бинормаль в точке M кривой $x = \cos t + \frac{1}{2}t\sin t$, $y = \sin t - \frac{1}{2}t\cos t$, $z = t$ пересекает плоскость XOY в точке N. Доказать, что проекция вектора $\overline{MN}$ на плоскость XOY имеет постоянную длину.

984. Из произвольной точки кривой $z = \frac{x^2}{3}$, $xy = 1$ опущен перпендикуляр на ось OX. Показать, что бинормаль кривой в той же точке образует с этим перпендикуляром прямой угол.

985. Показать, что на кривой $2a^2y = x^3$, $2xz = a^2$ существуют точки, бинормали которых пересекают ось OY.

986. Написать уравнения главной нормали винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ и показать, что все главные нормали этой линии лежат на поверхности $y = (x - 1)\operatorname{tg}\frac{z}{b}$.

987. На кривой $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\frac{t}{2}$ $(-\infty < t < \infty)$ найти точки, главные нормали в которых пересекают ось OX.

988. Доказать, что на кривой $z = \frac{a^2}{2x}$, $y = \frac{x^3}{2a^2}$ существуют точки, главные нормали которых параллельны плоскости YOZ.

989. Показать, что все бинормали кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2}{3}t^3$ образуют постоянный угол φ_0 с некоторым вектором. Определить угол φ_0.

990. Доказать: все бинормали кривой класса, большего или равного двум, не могут проходить через одну и ту же точку пространства.

991. Между точками кривых (l_1) и (l_2) класса $\geqslant 2$ установлено соответствие. Доказать, что если касательные к кривой (l_1) параллельны бинормалям кривой (l_2) в соответствующих точках, то и бинормали кривой (l_1) параллельны касательным кривой (l_2). Показать также, что главные нормали кривых (l_1) и (l_2) в соответствующих точках параллельны.

992. От каждой точки кривой $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a\sin\frac{t}{2}$ на ее главных нормалях отложены конгруэнтные отрезки длиной $a\sqrt{1 + \sin^2\frac{t}{2}}$. Найти уравнение кривой, образованной концами этих отрезков, и выяснить ее форму.

993. От каждой точки кривой $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$ на бинормалях отложены конгруэнтные отрезки длиной $d = e^t\sqrt{6}$. Определить уравнение спрямляющей плоскости новой кривой, образованной концами этих отрезков.

994. Доказать, что кривая, образованная концами отрезков постоянной длины, отложенных на главных нормалях некоторой кривой класса $\geqslant 2$ от каждой ее точки, пересекает эти нормали под прямым углом.

995. В отрицательном направлении бинормалей от каждой точки кривой $x = a\sin t$, $y = bt$, $z = a\cos t$ отложены отрезки длиной $l = \sqrt{a^2 + b^2}$. Найти уравнения кривой, образованной концами этих отрезков.

996. От каждой точки кривой $x = \cos t$, $y = t$, $z = \sin t$ в положительном направлении главной нормали отложены отрезки длиной $l = \frac{5}{\sin t}$. Найти уравнения кривой, образованной концами таких отрезков.

997. От каждой точки кривой $x = \cos\alpha\cos t$, $y = \cos\alpha\sin t$, $z = t\sin\alpha$ $(\alpha = \text{const})$ на бинормалях отложены отрезки единичной длины. Определить угол θ, под которым бинормали новой кривой, образованной концами этих отрезков, пересекают бинормали заданной кривой.

§ 45. Кривизна и кручение кривой. Понятие о натуральных уравнениях

В настоящем параграфе кривизна кривой обозначается через k, а кручение — через $\varkappa$.

998. Вычислить кривизну и кручение кривой $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$, $(0 < t < \infty)$, в точке $(2, 0, 1)$.

999. Найти уравнение главной нормали и определить кривизну кривой $x = \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{2t^3}{3}$, $z = \frac{t^4}{2}$ $(-\infty < t < 0)$ в точке $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

1000. Написать уравнения бинормали и определить кручение кривой $y = \frac{x^2}{2}$, $z = \frac{x^3}{6}$ в точке $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$.

1001. Доказать, что кривая $x = t^2 - 1$, $y = t^2 + 2$, $z = t^3$ плоская, и найти уравнение плоскости, в которой она лежит.

1002. Доказать, что кривая $x = a_1t^2 + b_1t + c_1$, $y = a_2t^2 + b_2t + c_2$, $z = a_3t^2 + b_3t + c_3$ плоская, $(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

1003. Вычислить кручение $\varkappa_0$ кривой $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ в точке $(1, 1, 0)$.

1004. Найти основные инвариантные векторы $\boldsymbol{t}_0$, $\boldsymbol{n}_0$, $\boldsymbol{b}_0$, кривизну k_0 и кручение $\varkappa_0$ кривой $x = t \sin t$, $y = t \cos t$, $z = te^t$ в начале координат.

1005. Определить координаты точки, в которой кривая $y = e^x$, $z = e^{-x}$ имеет наибольшее кручение.

1006. Найти уравнения бинормали и определить кручение кривой $y = \frac{x^3}{3}$, $z = \frac{1}{2x}$ в точке $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

1007. В каких точках кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \frac{1}{2}\sin 2t$, $(-2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi)$, кручение положительно?

1008. Доказать, что если для данной кривой класса $\geqslant 2$ отношение кривизны и кручения есть постоянное число λ, то вектор $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{t} + \lambda\boldsymbol{b}$ не меняется вдоль кривой и угол, образованный касательной к кривой с этим вектором, также остается неизменным. Здесь $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{b}$ — орты касательной и бинормали.

1009. Доказать, что для кривой класса $\geqslant 2$, в каждой точке которой касательный вектор $\boldsymbol{t}$ образует постоянный угол с некоторым постоянным вектором, отношение кривизны и кручения постоянно. Такие кривые называются линиями откоса.

1010. Даны две кривые L и L^* класса $\geqslant 2$. Показать, что если между их точками можно установить соответствие так, чтобы в соответствующих точках кривые имели одну и ту же бинормаль, то эти кривые плоские.

1011. Показать, что если главные нормали кривой L класса $\geqslant 2$ совпадают с бинормалями другой кривой L^* класса $\geqslant 2$, то кривизна k и кручение $\varkappa$ кривой L связаны соотношением: $\alpha(k^2 + \varkappa^2) = k$, где $\alpha = \text{const}$.

1012. Составить натуральные уравнения следующих кривых:
а) $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ (a\neq 0,\ b\neq 0)$;
б) $x=at,\ y=a\sqrt{2}\ln t,\ z=\frac{a}{t},\ (0<t<\infty,\ a\neq 0)$;
в) $\boldsymbol{r}=e^t(a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{k}),\ (a\neq 0)$.

§ 46. Плоские кривые

1013. Дана трактриса $x=a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+\cos\varphi\right),\quad y=a\sin\varphi$, $(0<\varphi<\pi)$. Показать, что длина отрезка ее касательной от точки касания до оси OX постоянна.

1014. Доказать, что для цепной линии $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ радиус кривизны R равен длине нормали от точки кривой до пересечения с осью OX.

1015. Доказать, что длина отрезка касательной к астроиде $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a\neq 0)$ в любой ее точке, заключенного между осями координат, равна a.

1016. Составить уравнения касательной и нормали кривой $x=\frac{t^2}{1-t},\ y=\frac{t}{t^2-1},\quad (-\infty<t<-1,\ -1<t<1,\ 1<t<\infty)$, в точке $\left(4,\ \frac{2}{3}\right)$.

1017. Через точку (0, 2) плоскости проведены касательные к кривой $x=\cos t,\ y=\sin t,\ (0\leqslant t<2\pi)$. Написать уравнения этих касательных.

1018. Подкасательной в произвольной точке кривой называется скалярная проекция на ось OX вектора касательной с началом в точке касания и концом, лежащим на оси OX. Найти кривую, которая в каждой точке имеет постоянную подкасательную a, $(a>0)$.

1019. Поднормалью в произвольной точке кривой называется скалярная проекция на ось OX вектора нормали с началом в данной точке и концом, лежащим на оси OX. Найти кривую, которая в каждой точке имеет постоянную поднормаль a, $(a>0)$.

1020. Найти кривую, которая в каждой точке имеет постоянный отрезок нормали от точки кривой до точки пересечения с осью OX.

1021. Найти кривую, которая в каждой точке имеет постоянный отрезок касательной от точки кривой до точки пересечения с осью OX.

1022. Доказать, что касательная к линии $x=a(1-\cos t),\ y=a(1-\sin t),\ (0\leqslant t<2\pi,\ a\neq 0)$, образует вместе с осями координат треугольник, периметр которого не зависит от точки касания.

1023. Найти радиус кривизны кривой $x=t^2,\ y=2t^3$ в точке (1, 2).

1024. Найти кривизну кривой $x=3t^2,\ y=3t-t^3$ в точке $t=1$.

1025. Вычислить радиус кривизны трактрисы

$$x = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right), \quad y = a\sin\varphi \qquad (0 < \varphi < \pi, \ a \neq 0)$$

в произвольной точке.

1026. Доказать, что всякая плоская линия постоянной кривизны k является окружностью ($k \neq 0$) или прямой ($k = 0$).

1027. В какой точке параболы $y^2 = 8x$ радиус кривизны равен $\frac{125}{16}$?

1028. Показать, что натуральное уравнение цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ есть $aR = a^2 + s^2$, где s — длина дуги, а R — радиус кривизны этой кривой.

1029. Найти параметрические уравнения кривой, натуральное уравнение которой имеет вид $k = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}$, где s — длина дуги, а k — кривизна этой кривой.

1030. Найти натуральное уравнение кривой, параметрические уравнения которой имеют вид: $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$.

1031. Найти кривую, натуральное уравнение которой имеет вид $k = \frac{1}{\sqrt{s^2 - 1}}$. Здесь k — кривизна, а s — длина дуги этой кривой.

1032. Найти кривую, натуральное уравнение которой имеет вид: $k = \frac{1}{\sqrt{s}}$. Здесь k — кривизна, а s — длина дуги этой кривой.

1033. Найти кривую, имеющую натуральное уравнение $s^2 + \frac{1}{k^2} = 4$, где k — кривизна, а s — длина дуги этой кривой.

1034. Найти кривую, имеющую натуральное уравнение $k = \frac{1}{as + b}$, $(s > 0, \ a > 0)$.

1035. Эволютой кривой называется множество всех центров кривизны кривой. Доказать, что эволюта трактрисы $x = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right)$, $y = a\sin\varphi$ $(0 < \varphi < \pi, \ a \neq 0)$ есть цепная линия $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

1036. Дана циклоида $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$, $(a \neq 0)$. Доказать, что эволютой циклоиды является также циклоида (см. задачу 1035).

1037. Найти эволюты следующих кривых (см. задачу 1035):

а) эллипса: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$

$$(0 \leqslant t < 2\pi, \ a \neq 0, \ b \neq 0);$$

б) параболы: $x^2 = 2py$.

в) астроиды: $x = a\cos^3\varphi$, $y = a\sin^3\varphi$,

$$(0 \leqslant \varphi < 2\pi, \ a \neq 0).$$

Глава XI

ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ

§ 47. Понятие простой поверхности; простейшие топологические свойства

Понятие поверхности. Пусть

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Phi, \tag{1}$$

векторная функция, заданная на множестве $\Phi \subset R^2$, где R^2 есть $\{(x, y): x \in R, y \in R\}$, uv — плоскость. Обозначим через s множество точек M пространства TE_3, удовлетворяющих условию: $\overline{OM} = \boldsymbol{r}(u, v)$ для всех $(u, v) \in \Phi$ (O — фиксированная точка). Функция (1) задает отображение Φ на s. Это отображение будем называть параметрическим представлением множества s и обозначать через $\pi: \Phi \to s$.

Отображение π называется регулярным параметрическим представлением класса C^m ($m \geqslant 1$) множества s, если Φ — область и выполнимы условия:

а) Функция (1) является функцией класса C^m ($m \geqslant 1$), т. е. все ее частные производные до m-го порядка включительно непрерывны на Φ.

б) $[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v] \neq 0$ для всех точек (u, v) области Φ.

Пусть s — подмножество TE_3. Локальной системой координат класса C^m ($m \geqslant 1$) в s называется всякое регулярное параметрическое представление класса C^m ($m \geqslant 1$) $\varkappa: \Phi \to s'$, заданное функцией (1) и удовлетворяющее условиям: а) $s' \subset s$; б) $\varkappa$ — гомеоморфизм. Локальную систему координат класса C^m ($m \geqslant 1$) в s будем обозначать через $\varkappa: \Phi \to s'$ (s). Мы, конечно, не исключаем из рассмотрения случая, когда $s' = s$.

Рассмотрим множество s точек пространства TE_3, в котором существует множество G локальных координатных систем класса C^m:

$$\varkappa_1: \Phi_1 \to s_1(s); \quad \varkappa_2: \Phi_2 \to s_2(s); \ \ldots; \ \varkappa_k: \Phi_k \to s_k(s), \tag{2}$$

удовлетворяющих условиям:

а) G покрывают все множество, т. е.

$$\bigcup_{i=1}^{k} s_i = s,$$

б) для каждого s_i существует такое открытое множество K_i пространства TE_3, что $s_i = s \cap K_i$.

В этом случае s вместе со всеми локальными координатными системами класса C^m в s простая поверхность класса C^m в пространстве TE_3, а множество (2) локальных координатных систем — базис или координатное представление простой поверхности s.

Очевидно, для каждой простой поверхности можно построить различные базисы.

Имеет место следующая важная теорема, которая часто применяется при решении задач.

Теорема 1. *Пусть s — множество точек пространства TE_3, координаты которых удовлетворяют условию: $f(x, y, z) = c$, где $c = \text{const}$. Если f есть функция класса C^m и по крайней мере одна из частных производных f_x, f_y, f_z отлична от нуля в каждой точке множества s, то s вместе со всеми локальными системами координат является простой поверхностью.*

Простая поверхность — элементарная, если существует базис, состоящий из одной-единственной локальной системы координат. Примерами элементарной поверхности является плоскость, а также полусфера без экватора (см. задачу 1049).

При решении задач в ряде случаев возникает необходимость перехода от одного координатного представления поверхности к другому, поэтому по аналогии с теорией кривой введем понятие «допустимые представления параметризации».

Пусть $\varphi = \varphi(u, v)$, $\psi = \psi(u, v)$ — две функции, заданные на открытом множестве w, принадлежащем (u, v)-плоскости, которые осуществляют отображение $f: w \to w^*$, где w^* — множество, принадлежащее (φ, ψ)-плоскости. Отображение f называется допустимым преобразованием параметризации класса C^m, если:

а) функции $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ принадлежат классу C^m $(m \geqslant 1)$;

б) $\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \neq 0$ во всех точках w;

в) f — взаимно-однозначное отображение.

В этом случае w^* есть открытое множество и функции $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ допускают обращение: $u = u(\varphi, \psi)$, $v = v(\varphi, \psi)$, причем $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(\varphi, \psi)} \neq 0$ на w^*.

Пусть s — простая поверхность, а $\varkappa_1: \Phi_1 \to s_1(s)$ и $\varkappa_2: \Phi_2 \to s_2(s)$ — две локальные системы координат в s. Если $s_0 = s_1 \cap s_2 \neq \varnothing$, то легко показать, что отображение, при котором координатам u, v точки $M \in s_0$ ставятся в соответствие координаты (φ, ψ) той же точки во второй системе, есть допустимое преобразование параметризации класса C^m.

Для удобства дальнейшего изложения ниже приведены параметрические представления ряда известных поверхностей, свойства которых изучаются во многих задачах настоящей главы.

1. Сферическая поверхность радиуса a с центром в начале координат

$$x = a\cos\varphi \cdot \cos\psi,\ y = a\cos\varphi \cdot \sin\psi,\ z = a\sin\varphi, \tag{3}$$
$$\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \psi < 2\pi,\ a > 0\right).$$

2. Прямой геликоид с осью OZ.

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av, \tag{4}$$
$$(0 \leqslant u < \infty,\ -\infty < v < \infty,\ a \neq 0).$$

Прямым геликоидом называется линейчатая поверхность, описываемая подвижной прямой, которая, пересекая под прямым углом некоторую неподвижную прямую (ось), вращается около этой оси и одновременно смещается вдоль нее пропорционально углу поворота.

3. Катеноид

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = f(r), \tag{5}$$

где функция, обратная $f(r)$, имеет вид:

$$r = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right), \qquad (a \leqslant r < \infty,\ -\infty < \varphi < \infty).$$

Катеноид является поверхностью вращения, профиль которой есть цепная линия, лежащая в плоскости XOZ (см. задачу 1028).

4. Псевдосфера псевдорадиуса a с осью OZ

$$x = a\sin u\cos v,\ y = a\sin u\sin v,\ z = f(u), \tag{6}$$

где $f(u) = a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u\right)$,

$$(0 < u < \pi,\ 0 \leqslant v < 2\pi,\ a > 0).$$

Псевдосфера есть поверхность, которая получается вращением трактрисы (см. задачу 1013) вокруг своей асимптоты.

1. Регулярные параметрические представления и локальные системы координат

1038. Показать, что функция

$$\boldsymbol{r} = (u+v)\boldsymbol{i} + (u-v)\boldsymbol{j} + (u^2+v^2)\boldsymbol{k},\ ((u, v) \in R^2),$$

является регулярным параметрическим представлением класса C^∞ эллиптического параболоида $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

1039. Показать, что функция

$$\boldsymbol{r} = \cos\psi\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\psi\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\varphi\,\boldsymbol{k},$$

$$(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \psi < 2\pi),$$

является параметрическим представлением сферы радиуса 1, однако оно не является регулярным. Изменить область определения так, чтобы параметрическое представление было регулярным класса C^∞.

1040. Дана векторная функция

$$\boldsymbol{R}(u, v) = \boldsymbol{r}(u) + v\boldsymbol{p},\quad ((u, v) \in R^2,\ \boldsymbol{p} = \mathrm{const}).$$

Показать, что эта функция является регулярным параметрическим представлением класса C^m цилиндра тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{r}(u)$ есть функция класса C^m и, кроме того, $\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{du}\,\boldsymbol{p}\right] \neq \boldsymbol{0}$ для всех u.

1041. Показать, что функция

$$\boldsymbol{r} = F(u, v) = (\sin 2v \cos v)\,\boldsymbol{i} + (\sin 2v \sin v)\,\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k},$$

$$\left(-\infty < u < \infty,\ 0 < v < \frac{3\pi}{4}\right),$$

является регулярным параметрическим представлением класса C^∞ цилиндра s_0, образующие которого параллельны оси OZ, а направляющей является кривая $\rho = \sin 2\varphi$, $\left(0 < \varphi < \frac{3\pi}{4}\right)$, заданная полярным уравнением в плоскости OXY.

1042. Показать, что функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}(u, v)$ (см. задачу 1041), заданная на области $\Phi_1 = \left(0 < v < \frac{\pi}{2},\ -\infty < u < \infty\right)$, определяет локальную систему координат класса $C^m : \varkappa_1 : \Phi_1 \to s_1\,(s_0)$, где s_0 — цилиндр, а $s_1 = \varkappa(\Phi_1)$.

1043. Показать, что функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}(u, v)$ (см. задачу 1041), заданная на области $\Phi_2 = \left(\frac{\pi}{4} < v < \frac{3\pi}{4},\ -\infty < u < \infty\right)$, определяет локальную систему координат $\varkappa_2$: $\Phi_2 \to s_2\,(s_0)$, где s_0 — цилиндр, заданный в задаче 1041, а $s_2 = \varkappa_2(\Phi_2)$.

1044. Пусть $f(u, v)$ — некоторая функция класса C^m, заданная на множестве Φ. Показать, что функция

$$\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + f(u, v)\,\boldsymbol{k}$$

определяет локальную систему координат класса $C^m : \varkappa : \Phi \to S$.

1045. Показать, что функции

$$\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + \sqrt{1 - u^2 - v^2}\,\boldsymbol{k}, \quad \Phi = (u^2 + v^2 < 1)$$

определяют локальную координатную систему: $\varkappa : \Phi \to s_1(s)$; где s — сфера с центром в начале координат, а $s_1 = \varkappa(\Phi)$.

1046. Показать, что функция

$$\boldsymbol{r} = u^2\boldsymbol{i} + uv\boldsymbol{j} + v^2\boldsymbol{k}, \quad u > 0,\ v > 0$$

определяет локальную координатную систему $\varkappa : \Phi \to s'(s)$, где $\Phi = (u > 0,\ v > 0)$, а s — гиперболический параболоид: $y^2 = xz$.

1047. Показать, что функция

$$\boldsymbol{r} = F(\varphi, \psi) = (b + a\cos\varphi)\cos\psi\,\boldsymbol{i} + (b + a\sin\varphi)\sin\psi\,\boldsymbol{j} + a\cos\varphi \cdot \boldsymbol{k},$$

$$(-\infty < \varphi < \infty,\ -\infty < \psi < \infty,\ 0 < a < b)$$

определяет регулярное параметрическое представление класса C^∞ тора (см. задачу 1123).

1048. Показать, что

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{a} + v\boldsymbol{p}(u),$$

где $\boldsymbol{a} = \mathrm{const}$, есть параметрическое представление конуса с вершиной в точке C радиусом вектором $\boldsymbol{a}$. При каких ограничениях, накладываемых на параметры u, v и функцию $\boldsymbol{p}(u)$, это представление будет регулярным класса C^m?

2. Простые поверхности

1049. Показать, что плоскость и полусфера без экватора являются примерами элементарных поверхностей.

1050. Показать, что гиперболический параболоид $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ является элементарной поверхностью класса C^∞.

1051. Показать, что эллипсоид, гиперболический параболоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический параболоид, конус с выколотой вершиной являются простыми поверхностями.

1052. Построить базис сферы с центром в начале координат и радиуса 1 (см. задачу 1045).

1053. Показать, что тор является простой поверхностью (см. задачу 1047).

1054. Показать, что конус без вершины $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ является элементарной поверхностью класса C^∞.

1055. Выяснить, какие из следующих поверхностей являются компактными:

а) $x^2 - y^4 + z^6 = 1$;

б) $x^2 - 2x + y^2 + z^4 = 1$;

в) $x^2 + y^2z^2 = 1$;

г) $x^2 + y^4 + z^6 = 1$.

§ 48. Касательная плоскость и нормаль. Линии на поверхности

1. Касательная плоскость и нормаль

1056. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $xy^2 + z^3 = 12$ в точке M_0 (1, 2, 2).

1057. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к прямому геликоиду (см. с. 115) в произвольной его точке.

1058. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $xyz = a^3$, ($a = \text{const} \neq 0$), в произвольной ее точке (x_0, y_0, z_0).

1059. Дана поверхность $xyz = 1$. Написать уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $x + y + z = 1$.

1060. Доказать, что все плоскости, касательные к поверхности $z = x \sin^2 \frac{y}{x}$, $x \neq 0$, проходят через одну и ту же точку.

1061. Отрезок нормали к поверхности $z^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2} + 1$, заключенный между поверхностью и плоскостью XOY, проектируется на плоскость XOY. Доказать, что проекция этого отрезка не зависит от выбора точки поверхности.

1062. Доказать, что все плоскости, касательные к поверхности $z = x + (y - z) \sin (y - z)$, параллельны одному и тому же вектору $\boldsymbol{p}$.

1063. Показать, что объем V тетраэдра, образованного пересечением координатных плоскостей и касательной плоскости к поверхности $x = u$, $y = v$, $z = \frac{a^3}{uv}$, $(0 < u < \infty,\ 0 < v < \infty,\ a \neq 0)$, не зависит от выбора точки касания.

1064. Показать, что сумма квадратов отрезков, отсекаемых на осях координат касательной плоскостью поверхности

$$x = u^3 \sin^3 v,\ y = u^3 \cos^3 v,\ z = (a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}, \qquad (0 < u < \infty, 0 < v < 2\pi)$$

не зависит от выбора точки касания.

1065. Дана поверхность $xyz = 1$. Найти ее нормали, проходящие через начало координат.

1066. Доказать, что все плоскости, касательные к поверхности $x^2 + 3y^2 - 2xz + z^2 - 2 = 0$, параллельны одному и тому же вектору $\boldsymbol{p}$.

1067. Доказать, что все касательные плоскости к поверхности $\frac{x-1}{1-z} + \ln\frac{y}{1-z} = 0$ проходят через точку $A(1, 0, 1)$.

1068. Найти нормали к поверхности $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv + 3$, проходящие через начало координат [1].

1069. Найти касательные плоскости к поверхности

$$x = u^3,\ y = v^3,\ z = u + v,$$

проходящие через прямую $x + y - 1 = 0$, $z = 0$.

1070. Показать, что три семейства поверхностей

$$4x + y^2 + z^2 = u, \quad y = vz, \quad z^2 + y^2 = we^x$$

(u, v, w — параметры семейств) образуют триортогональную систему, т. е. три поверхности (по одной из каждого семейства), проходящие через произвольную точку (x, y, z), пересекаются под прямым углом.

1071. Показать, что поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = ux$,

$$z = vy,\ (x^2 + y^2 + z^2)^2 = w(y^2 + z^2)$$

образуют триортогональную систему (см. предыдущую задачу).

1072. Доказать, что касательные плоскости к поверхности

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = a\,(x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ a > 0)$$

отсекают на осях координат отрезки, сумма которых не зависит от выбора точки на поверхности.

1073. Найти соответствие между точками двух поверхностей

$$x = u,\ y = v,\ z = uv^2,$$

$$x = u^*,\ y = u^* \cdot v^*,\ z = v^*,$$

при котором касательные плоскости в соответствующих точках параллельны.

---

[1] Здесь и в дальнейшем пределы изменения параметров не будут указываться, если параметры изменяются от $-\infty$ до $+\infty$.

2. Линии на поверхности

1074. Определить вид параметрических линий поверхности

$$x=\sin u+2v,\ y=\cos u+3v,\ z=12v,$$
$$(0<u\leqslant 2\pi,\ -\infty<v<\infty).$$

1075. На поверхности $x=v\cos u-\sin u$, $y=v\sin u+\cos u$, $z=u$, $(0\leqslant u<2\pi,\ 0\leqslant v<\infty)$, дана линия $u-2v=1$. Доказать, что соприкасающаяся плоскость данной линии в любой точке является касательной плоскостью к поверхности в той же точке.

1076. Дана поверхность $x=au$, $y=\psi(u)$, $z=bv$. Здесь a и b постоянные, отличные от нуля, а $\psi(u)$ — произвольная, дважды дифференцируемая функция, причем $\psi''(u)\neq 0$. Доказать, что главная нормаль u-линии в любой точке совпадает с нормалью к поверхности в той же точке.

1077. В пространстве дана кривая L: $x=2t$, $y=\ln t$, $z=t^2$, $(0<t<\infty)$. Составить параметрические уравнения поверхности Γ, образованной бинормалями этой линии. Доказать, что в каждой точке кривой L нормалью к поверхности Γ является главная нормаль кривой L.

1078. В пространстве дана кривая L: $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=\sqrt{2}t$. Составить параметрические уравнения поверхности Γ, образованной главными нормалями этой кривой. Доказать, что в каждой точке кривой L касательная плоскость поверхности Γ совпадает с соприкасающейся плоскостью кривой L.

1079. Составить параметрические уравнения поверхности, образованной касательными к винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $(ab\neq 0)$. Написать уравнение касательной плоскости и нормали поверхности в произвольной точке. Доказать, что нормаль к поверхности составляет с осью z постоянный угол.

1080. Дана поверхность $x=au$, $y=\sin u$, $z=bv$, $(a\neq 0,\ b\neq 0)$. Доказать, что главная нормаль u-линии в любой точке совпадает с нормалью к поверхности в той же точке.

1081. Доказать, что соприкасающаяся плоскость v-линии в любой точке прямого геликоида (см. с. 115) совпадает с касательной плоскостью поверхности в этой точке.

1082. Доказать, что линия $u+v=4$, лежащая на поверхности $x=3u+3v$, $y=3u^2+3v^2$, $z=2u^3+2v^3$, является прямой.

§ 49. Первая квадратичная форма. Длина дуги на поверхности

1083. Вычислить первую квадратичную форму следующих поверхностей:

а) плоскости, заданной уравнениями:

$$x=u,\ y=v,\ z=0;$$

б) плоскости, заданной в полярных координатах:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = 0;$$

в) сферы (см. с. 115);

г) псевдосферы (см. с. 116);

д) геликоида общего вида:

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = f(u) + av,$$
$$(0 \leqslant u < \infty,\ -\infty < v < \infty),$$

где $f(u)$ — функция класса C^1. Рассмотреть частный случай, когда $f(u) \equiv 0$;

е) поверхности вращения:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = f(r), \qquad (0 < r < \infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi),$$

где $f(r)$ — функция класса C^1, а r и ψ — параметры;

ж) катеноида (см. с. 116).

1084. Дана первая квадратичная форма поверхности:

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2, \qquad (a \neq 0).$$

Найти параметр криволинейного треугольника, принадлежащего этой поверхности и образованного линиями $u = \frac{1}{2}av^2$,

$$u = -\frac{1}{2}av^2, \quad v = 1.$$

1085. Найти длину дуги кривой $u = \frac{1}{2}av^2$, $(a \neq 0)$, заключенной между точками $A(u = 0,\ v = 0)$ и $B(u = 2a,\ v = 2)$ поверхности $x = \frac{u}{2}(\sqrt{3}\cos v + \sin v)$, $y = \frac{u}{2}(\sqrt{3}\sin v - \cos v)$, $z = av$, $(0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v < 2\pi)$.

1086. Показать, что прямой геликоид (см. (2), с. 115) изометричен катеноиду (см. (3), с. 116).

1087. Показать, что винтовая поверхность $x = \rho\cos v$, $y = \rho\sin v$, $z = \rho + v$, $(0 \leqslant \rho < \infty,\ 0 \leqslant v < 2\pi)$, изометрична гиперболоиду вращения $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = \sqrt{r^2 - 1}$, $(1 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, причем соответствие налагающихся точек устанавливается уравнениями $\varphi = v + \operatorname{arctg}\rho$, $r^2 = \rho^2 + 1$.

1088. Дана поверхность L векторным представлением: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}(u) + v\boldsymbol{l}(u)$, где $\boldsymbol{\rho}(u)$ и $\boldsymbol{l}(u)$ — функции класса $\geqslant 1$. Доказать, что поверхность L:

а) является линейчатой поверхностью;

б) является развертывающейся поверхностью тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\rho}'(u)\,\boldsymbol{l}'(u)\,\boldsymbol{l}(u) \equiv 0$.

1089. Показать, что поверхность $x = \cos v - (u + v)\sin v$,

$$y = \sin v + (u + v)\cos v,\ z = u + 2v, \qquad (0 \leqslant u < \infty,$$

$0 \leqslant v < 2\pi)$ развертывающаяся.

1090. Показать, что если кривая класса $\geqslant 2$ не плоская, то ее главные нормали не могут образовать развертывающуюся поверхность.

1091. Показать, что если кривая не плоская, то ее бинормали не могут образовать развертывающуюся поверхность.

1092. Пусть l — некоторая образующая развертывающейся поверхности, а кривые Γ_1 и Γ_2, лежащие на поверхности, пересекают l в точках M_1 и M_2. Доказать, что касательные к Γ_1 и Γ_2 в точках M_1 и M_2 лежат в одной плоскости.

1093. Через каждую точку кривой L класса $\geqslant 2$ проведена нормальная плоскость и в ней построена окружность с центром на кривой L и с заданным радиусом $a > 0$, причем $a \cdot k < 1$, где k — кривизна кривой L. Множество всех точек построенных окружностей образуют в пространстве трубообразную поверхность S.

а) Показать, что если $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(u)$ — векторное параметрическое представление кривой L, где u — длина дуги, то S определяется уравнением:

$$\boldsymbol{R}\,(u, \varphi) = \boldsymbol{r}\,(u) + a\boldsymbol{n}\,(u) \cos \varphi + a\boldsymbol{b}\,(u) \sin \varphi, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{n}\,(u)$ и $\boldsymbol{b}\,(u)$ — орты главной нормали и бинормали кривой L.

б) Найти первую квадратичную форму поверхности S в параметрическом представлении (1).

1094. Пусть S — трубообразная поверхность, векторное параметрическое представление которой имеет вид (1) (см. предыдущую задачу).

а) Вычислить площадь области на S, ограниченной окружностями $u = u_1$, $u = u_2$.

б) Найти площадь поверхности S в частном случае, когда L — дуга винтовой линии $x = A \cos t$, $y = A \sin t$,

$$z = Bt, \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi,\ A > a,\ B \neq 0).$$

§ 50. Угол между линиями на поверхности

1095. Доказать, что поверхность $x = 4\,(u + v)$, $y = 3\,(u - v)$, $z = 2uv$ является гиперболическим параболоидом, и вычислить угол между кривыми $u + v = 0$ и $u - v = 0$ в их точке пересечения.

1096. Дана первая квадратичная форма поверхности:

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2.$$

Определить, под каким углом θ пересекаются кривые $u + v = 0$, $u - v = 0$, если $a = \text{const}$.

1097. Найти угол θ между линиями $u = \frac{1}{2} av^2$, $u = -\frac{1}{2} av^2$ поверхности, если дана первая квадратичная форма поверхности $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2$, где $a = \text{const}$.

1098. Показать, что линии на геликоиде (см. с. 115), определяемые дифференциальными уравнениями $du^2 - (a^2 + u^2)\,dv^2 = 0$, образуют ортогональную систему.

1099. Дана первая квадратичная форма поверхности:

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2,$$

где $a = \text{const}$. Найти ортогональные траектории семейства линий на этой поверхности, определяемых дифференциальным уравнением:

$$du = \sqrt{u^2 + a^2}\, dv.$$

1100. Дана поверхность: $x = u$, $y = v$, $z = uv$. Найти общий вид уравнения линий, пересекающих ортогонально линии $u = \text{const}$ данной поверхности.

1101. Найти угол ψ_0, под которым пересекаются линии $u = u_0$, $v = v_0$ на поверхности $x = u$, $y = v$, $z = uv$.

1102. Поверхность задана параметрическим векторным представлением: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$. Составить дифференциальное уравнение линий, делящих пополам углы между координатными линиями данной поверхности.

1103. Доказать, что семейства линий, определяемых дифференциальными уравнениями $\sqrt{E}\, du + \sqrt{G}\, dv = 0$, $\sqrt{E}\, du - \sqrt{G}\, dv = 0$, ортогональны. Здесь E, F и G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности.

1104. Найти уравнения линий на прямом геликоиде (см. с. 115), делящих пополам углы между координатными линиями.

1105. Дана первая квадратичная форма поверхности:

$$ds^2 = uv\,du^2 - u^2 dv^2.$$

Из семейств линий с дифференциальными уравнениями $u\,du + v\,dv = 0$ (α) и $\delta u = -\delta v$ (β) отобрать те, которые пересекаются под прямым углом.

1106. Показать, что уравнения $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = \frac{1}{2} u^2$, $(0 \leqslant u < \infty,\ 0 \leqslant v < 2\pi)$, определяют параболоид вращения. Найти дифференциальные уравнения линий, делящих пополам угол между координатными линиями.

1107. Уравнения $x = a(u + v)$, $y = b(u - v)$, $z = uv$, $(a > 0$, $b > 0)$, определяют гиперболический параболоид. Показать, что линия

$$\left(u + \sqrt{u^2 + a^2 + b^2}\right)\left(v + \sqrt{v^2 + a^2 + b^2}\right) = l,$$

лежащая на этой поверхности, делит пополам угол между u-линиями и v-линиями. Здесь $l = \text{const}$.

1108. Показать, что кривые $\ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + v = \text{const}$, $\ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) - v = \text{const}$, лежащие на прямом геликоиде (см. с. 115), ортогональны.

1109. Доказать, что линии $2u + v = \text{const}$, лежащие на поверхности $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u + v$, ортогональны u-линиям.

1110. Поверхность задана параметрически: $x = \sqrt{p}\,(u + v)$, $y = \sqrt{q}\,(u - v)$, $z = 2uv$, $(p > 0,\ q > 0)$. Показать, что эта поверхность есть гиперболический параболоид. Вычислить угол φ между кривой $u = v$ и u-линией; найти значение φ_0 этого угла в точке (4, 4).

1111. Доказать, что линия $u - \ln \operatorname{tg} \frac{v}{2} = 5$, заданная на сфере $x = a \cos u \cdot \sin v$, $y = a \sin u \cdot \sin v$, $z = a \cos v$, $(0 \leqslant u < 2\pi, 0 <$

$< v < \pi$), в каждой своей точке делит пополам угол между параллелями и меридианами.

1112. Доказать, что кривые $\sin u + v + 1 = 0$, $\frac{1}{3\sin^3 u} + v = c$, лежащие на псевдосфере (см. (6) с. 116), ортогональны.

1113. Поверхность F задана параметрически: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u$, $(0 < u < \infty, 0 \leqslant v < 2\pi)$. Показать, что F — конус вращения и параметрические линии $v = \mathrm{const}$ являются образующими конуса. Доказать, что линия $\sqrt{2}\ln u - v = 0$ в каждой своей точке делит пополам угол между параметрическими линиями.

1114. Доказать, что линия $\ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) - v = 4$, лежащая на прямом геликоиде (см. (4), с. 115), в каждой своей точке делит пополам угол между параметрическими линиями.

1115. Поверхность задана параметрически:

$$x = \frac{a}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right)\cos u, \quad y = \frac{a}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right)\sin u, \quad z = \frac{a}{2}\left(v - \frac{1}{v}\right),$$

$$(0 \leqslant u < 2\pi, \ 0 < v < \infty).$$

Показать, что это однополостный гиперболоид вращения и что координатные линии на нем ортогональны.

1116. Дана поверхность $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = v$, $(0 \leqslant u < 2\pi, -\infty < v < \infty)$. Написать уравнение линии, лежащей на поверхности, проходящей через точки A $(u = 0, v = 0)$, B $\left(u = \frac{\pi}{2}, v = 1\right)$ поверхности и пересекающей все v-линии под постоянным углом.

1117. На поверхности $x = u\cos v, y = u\sin v, z = a\ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$, $(a \leqslant u < \infty, 0 \leqslant v < 2\pi, a > 0)$, найти линии, пересекающие линии $v = \mathrm{const}$ под постоянным углом θ.

1118. Дана поверхность $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u$, $(0 \leqslant u < 2\pi, 0 \leqslant u < \infty)$. Написать параметрические уравнения линий, проходящих через точку A $(u = 1, v = 2)$ и пересекающих все v-линии под углом в 30°.

§ 51. Кривизна кривой на поверхности. Вторая квадратичная форма

1119. Найти вторую квадратичную форму поверхности $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$, где $f(u, v)$ — функция класса $\geqslant 2$.

1120. Найти вторую квадратичную форму псевдосферы (см. с. 116).

1121. Найти вторую квадратичную форму поверхности вращения $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = f(r)$, $(0 \leqslant r < \infty, 0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, где $f(r)$ — функция класса $\geqslant 2$.

1122. Доказать, что поверхность S, заданная уравнениями

$$x = \sqrt{u^2 + a^2}\cos v, \ y = \sqrt{u^2 + a^2}\sin v, \ z = a\ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}),$$

$$(0 \leqslant u < \infty, -\infty < v < \infty),$$

является катеноидом (см. с. 116). Найти вторую квадратичную форму φ_2 поверхности S.

1123. Тором называется поверхность, образованная вращением окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности и не пересекающей окружность.

Показать, что поверхность, заданная параметрически: $x = (b + a\cos\varphi)\cos\psi$, $y = (b + a\sin\varphi)\sin\psi$, $z = a\cos\varphi$ $(0 < a < b)$ является тором, образованным вращением окружности радиуса a вокруг оси oz. Найти вторую квадратичную форму этой поверхности.

1124. Найти вторую квадратичную форму прямого геликоида (см. с. 115).

1125. Показать, что в фиксированной точке поверхности сумма нормальных кривизн кривых, имеющих ортогональные направления, постоянна.

1126. Доказать предложение: для того чтобы поверхность была плоскостью или областью на плоскости, необходимо и достаточно, чтобы вторая квадратичная форма тождественно обращалась в нуль.

1127. Доказать предложение: для того чтобы поверхность была сферой или частью сферы, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первой и второй квадратичных форм были пропорциональны.

1128. Найти нормальную кривизну k_n координатных линий поверхности:

$$x = \sqrt{u^2 + a^2}\cos v, \quad y = \sqrt{u^2 + a^2}\sin v, \quad z = a\ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right),$$

$$(0 \leqslant u < \infty, \quad 0 \leqslant v < 2\pi).$$

1129. Дана поверхность:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = u^2 + v^2.$$

Найти нормальную кривизну k_n линии $u - v^3 = 0$ в точке A $(u = 1, v = 1)$ этой поверхности.

1130. Найти кривизны нормальных сечений катеноида, проходящих через касательные к координатным линиям (см. задачу 1122).

1131. Найти главные направления и главные кривизны прямого геликоида (см. (4), с. 115).

1132. Выразить главные кривизны $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ поверхности, образованной касательными к заданной пространственной кривой, через кривизну и кручение этой кривой.

1133. Доказать, что у поверхности вращения параболы около ее директрисы отношение главных радиусов кривизны постоянно.

1134. Найти поверхности главных центров кривизны произвольной поверхности вращения (см. задачу 1083, е).

1135. Определить главные кривизны k_1 и k_2 гиперболического параболоида $x = u$, $y = v$, $z = uv$ в произвольной точке.

1136. Доказать, что на однополостном гиперболоиде и гиперболическом параболоиде биссектрисы углов между образующими имеют главные направления.

§ 52. Полная и средняя кривизны поверхности

1137. Найти полную и среднюю кривизны в точке (u, v) прямого геликоида (см. с. 115).

1138. Вычислить полную и среднюю кривизны:

а) гиперболического параболоида $z = x^2 - y^2$ в произвольной точке;

б) конуса вращения $x = av\cos u$, $y = av\sin u$, $z = cv$, $(0 \leqslant u < 2\pi,\ 0 < v < \infty)$;

в) поверхности, образованной касательными к пространственной кривой класса $\geqslant 2$.

1139. При каком условии поверхность, заданная уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — функция класса $\geqslant 2$, будет развертывающейся?

1140. Показать, что если у поверхности коэффициенты первой и второй квадратичных форм пропорциональны, то квадрат средней кривизны равен полной кривизне.

1141. Минимальной поверхностью называется такая поверхность, средняя кривизна которой во всех точках равна нулю. Найти минимальные поверхности вращения.

1142. Доказать, что средняя кривизна поверхности $z = \ln\cos x - \ln\cos y$ равна нулю.

1143. Доказать, что на поверхности тора (см. задачу 1123) имеются эллиптические, гиперболические и параболические точки. Определить области, в которых расположены множества этих точек.

1144. Показать, что цилиндрическая поверхность, заданная параметрически $\boldsymbol{R}(u, v) = \boldsymbol{r}(u) + v\boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{r}(u)$ — функция класса $\geqslant 2$, а $\boldsymbol{p} = \mathrm{const}$, не содержит гиперболических точек.

1145. На поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$, $(0 \leqslant u < \infty,\ 0 \leqslant v < 2\pi)$, найти линии, ортогональные к линиям, вдоль которых полная кривизна поверхности постоянна.

1146. Линия поверхности называется параболической, если все ее точки параболические. Найти параболические линии поверхности $x = v^3$, $y = u^2 + u$, $z = \dfrac{u^2}{2a} + av$.

1147. Трактриса, заданная уравнениями $x = a\left(\ln\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right)$, $y = a\sin\varphi$, $(0 < \varphi < \pi,\ a \neq 0)$, вращается около своей асимптоты. Доказать, что полная кривизна полученной поверхности постоянна.

1148. Дана поверхность $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, где $\boldsymbol{r}(u, v)$ — функция класса $\geqslant 3$ в некоторой области Φ. Доказать, что

$$K(EG - F^2)^2 = (\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v) - (\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)^2.$$

Здесь E, F и G — коэффициенты первой квадратичной формы, а K — гауссова кривизна поверхности.

1149. В условиях предыдущей задачи, используя ее результат, показать, что

$$K(EG - F^2)^2 = \left(F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}\right)(EG - F^2) +$$

$$
+\begin{vmatrix} 0 & F_v-\frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v \\ \frac{1}{2}E_u & E & F \\ F_u-\frac{1}{2}E_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}.
$$

1150. Доказать теорему Гаусса: полная кривизна поверхности класса $\geqslant 3$ может быть выражена через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности и их производные и принадлежит, следовательно, к внутренней геометрии поверхности.

§ 53. Замечательные линии на поверхности

1151. Определить асимптотические линии прямого геликоида (см. с. 115).

1152. Найти асимптотические линии поверхности:

$$x = au, \quad y = bv, \quad z = cu^2v.$$

1153. Найти уравнения асимптотических линий поверхности $z = xy^2$ и показать, что одно семейство таких линий — прямолинейные образующие этой поверхности.

1154. На поверхности $x = u$, $y = uv$, $z = u + v^3$ найти асимптотические линии.

1155. Показать, что асимптотические линии поверхности

$$z = \ln\cos x - \ln\cos y, \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right),$$

ортогональны.

1156. Найти ортогональные траектории асимптотических линий на поверхности:

$$x = \cos v + u\sin v, \quad y = -\sin v + u\cos v, \quad z = v,$$
$$(0 \leqslant u < \infty,\ 0 \leqslant v < \infty).$$

1157. Составить уравнение асимптотических линий параболоида: $x = u$, $y = v$, $z = uv$.

1158. Найти асимптотические линии поверхности:

$$x = \cos v + u\sin v, \quad y = -\sin v + u\cos v, \quad z = v,$$
$$(0 \leqslant u < \infty,\ 0 \leqslant v < \infty).$$

1159. Доказать, что u-линии являются асимптотическими линиями поверхности

$$x = (1+u)\cos v, \quad y = (1+u)\sin v, \quad z = u, \qquad (0 \leqslant u < \infty,\ 0 \leqslant v < 2\pi).$$

1160. Найти уравнения линий кривизны на прямом геликоиде (см. с. 115).

1161. Найти линии кривизны поверхности:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = uv.$$

1162. Найти линии кривизны и асимптотические линии развертывающейся поверхности, не совпадающей с плоскостью.

1163. Составить уравнения линий кривизны конуса:

$$x = v\cos u,\ y = v\sin u,\ z = 2v, \qquad (0 \leqslant u < 2\pi,\ 0 < v < \infty).$$

1164. Показать, что линии кривизны поверхности

$$x = \cos u - v\sin u,\ y = \sin u + v\cos u,\ z = u + v,$$

$(0 \leqslant u < \infty,\ 0 \leqslant v < \infty)$ — плоские.

1165. На поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1})$ $(1 \leqslant u < \infty,\ 0 \leqslant v < 2\pi)$ найти линии, делящие пополам углы между линиями кривизны.

1166. Доказать, что поверхность $x = v - 1$, $y = v\operatorname{ch} u$, $z = u - 1$ пересекается с плоскостью YOZ по линии кривизны.

1167. Доказать, что вдоль каждой геодезической линии на поверхности вращения $\rho\cos\alpha = \mathrm{const}$, где ρ — расстояние точки от оси вращения, α — угол, который геодезическая образует с параллелью поверхности вращения.

1168. Найти геодезические линии следующих поверхностей:

а) круговой цилиндрической поверхности;

б) сферической поверхности (см. с. 115);

в) прямого геликоида (см. с. 115).

1169. Доказать, что плоская геодезическая линия на поверхности является линией кривизны.

1170. Доказать, что если линия кривизны на поверхности является геодезической, то она есть нормальное сечение поверхности.

1171. Пусть на сфере радиуса r_0 дан треугольник S, площадь которого σ, а стороны являются дугами больших окружностей. Найти сумму внутренних углов треугольника S.

1172. Пусть S — треугольник, стороны которого — геодезические линии, построен на поверхности с постоянной гауссовой кривизной $K = -a^2 < 0$. Зная площадь σ треугольника S, найти сумму его внутренних углов.

Глава XII

ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ

§ 54. Топологические пространства

Для решения задач данного параграфа необходимо, чтобы студенты были знакомы со следующими определениями и терминами:

Топологические пространства.

Множество R, элементы которого называются точками, есть топологическое пространство, если в нем задана система Φ его подмножеств, именуемых открытыми множествами, и притом так, что выполнены следующие два условия: а) *объединение любой системы* (конечной или бесконечной) *открытых множеств есть открытое множество;* б) *пересечение любых двух откры-*

тых множеств есть открытое множество; в) *все R и $\varnothing$ являются открытыми множествами.*

Любое множество M топологического пространства R можно также рассматривать как топологическое пространство, считая открытыми множествами в M любые его подмножества вида $F'_\alpha = M \cap F_\alpha$, где F_α — любой элемент семейства Φ.

Множество N называется замкнутым множеством, если $R \setminus N$ открыто.

Окрестностью точки $a \in R$ называется любое открытое множество N, такое, что $a \in N$. Точка a называется предельной точкой множества $M \subseteq R$, если любая окрестность этой точки содержит точку множества M, отличную от a.

Точка a называется внутренней точкой множества M, если существует такая окрестность этой точки, которая целиком содержится в M. В случае, если любая окрестность точки a содержит как точки множества M, так и точки множества $R \setminus M$, a называется граничной точкой множества M. Множество всех граничных точек называется границей множества, а множество всех внутренних и граничных точек — замыканием $\overline{M}$ множества M.

Множество $M \subseteq R$ называется связным, если его нельзя представить в виде объединения таких множеств A и B, что $A \cap \overline{B} = \varnothing$ и $\overline{A} \cap B = \varnothing$. Множество M топологического пространства R называется компактным, если всякое бесконечное подмножество множества M имеет предельную точку, принадлежащую M.

2. Метрические пространства. Шаровой r-окрестностью точки a метрического пространства R_ρ называется множество всех точек $x \in R_\rho$, удовлетворяющих условию $\rho(a, x) < r$. Открытым множеством метрического пространства назовем либо пустое множество, либо любое непустое множество M, удовлетворяющее условию: для каждой точки $a \in M$ существует хотя бы одна шаровая окрестность точки a, целиком принадлежащая множеству M. При этом можно показать, что метрическое пространство является топологическим пространством (см. задачу 1179). Мы видим, что метрическое пространство является частным случаем топологического пространства.

Имеет место следующее предложение:

Теорема 1. *В метрическом пространстве множество M компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

Пространство TE_3 является простейшим примером метрического пространства.

1. Топологические пространства; открытые и замкнутые множества

1173. Рассмотрим множество R, состоящее из двух точек a и b. Открытыми множествами будем считать множество R, пустое множество и точку a. Показать, что R — топологическое пространство.

1174. Пусть множество R — квадрат, т. е. множество точек на плоскости, координаты которых связаны соотношениями $0 \leqslant x \leqslant 1$

и $0 \leqslant y \leqslant 1$. Под открытыми множествами будем понимать пустое множество, все R, а также «полосу», т. е. множество точек M, первые координаты которых связаны соотношением: $b < x \leqslant 1$, где $0 \leqslant b < 1$. Будет ли R топологическим пространством?

1175. Зафиксируем точку O в трехмерном евклидовом пространстве. Открытыми множествами назовем все пространство, пустое множество, а также внешние области шаров с центром в точке O и произвольным радиусом r $(0 \leqslant r < \infty)$, т. е. множества всех точек M, таких, что $|OM| > r$.

Показать, что данное пространство с выделенными открытыми множествами является топологическим пространством.

1176. Пусть R — метрическое пространство с системой замкнутых множеств, описанной во введении к настоящему параграфу на с. 129. Выяснить, какие множества евклидова пространства TE_3, приведенные ниже, являются замкнутыми:

а) отрезок с концами a и b;

б) открытый луч;

в) открытое полупространство;

г) множество всех точек некоторой прямой;

д) множество всех точек сферы;

е) множество всех внутренних точек тетраэдра и точек, принадлежащих границе.

1177. Пусть S — множество точек пространства TE_3, координаты которых удовлетворяют условию: $f(x, y, z) = c = \text{const}$. Показать, что если $f(x, y, z)$ является непрерывной функцией во всех точках пространства TE_3, то S есть замкнутое множество.

1178. Выяснить, какие из множеств, приведенных в задаче 1176, являются открытыми.

1179. Доказать, что метрическое пространство является топологическим, если понятие открытого множества ввести так же, как и во введении на с. 129.

1180. Выяснить, какие множества будут замкнутыми в пространстве R, состоящем из двух точек a и b (см. задачу 1173). Будет ли R связно?

1181. Показать, что в евклидовом пространстве внутренность шара с центром в данной точке является окрестностью данной точки.

1182. В условиях задачи 1174 определить все замкнутые множества пространства R.

1183. Доказать, что в топологическом пространстве R пересечение любого числа замкнутых множеств (конечного или бесконечного) и объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнутое множество.

1184. Показать, что в евклидовом пространстве любое открытое множество можно представить в виде объединения счетного числа шаровых окрестностей.

1185. Показать, что множество M, принадлежащее топологическому пространству R, открыто тогда и только тогда, когда любая точка этого множества является внутренней.

1186. Показать, что множество M, принадлежащее метрическому пространству R, замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все такие точки a, что расстояние от a до M равно нулю.

2. Замыкание множества; связные и компактные множества

1187. Показать, что точка a принадлежит границе множества M тогда и только тогда, когда для любой окрестности U точки a выполнены условия: $U \cap M \neq \varnothing$, $U \cap (R \setminus M) \neq \varnothing$.

1188. В условиях задачи 1174 найти замыкания $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$, где N_1 и N_2 — квадраты, определяемые соотношениями:

$$N_1 \left\{ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2} \right\};$$

$$N_2 \left\{ \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2} \right\}.$$

1189. В топологическом пространстве, заданном в задаче 1175, найти замыкание куба с центром в точке O и ребром a. Найти границу куба.

1190. Будут ли следующие множества точек плоскости TE_2 связными:

а) множество точек плоскости, каждая из которых имеет хотя бы одну рациональную координату;

б) множество точек плоскости, имеющих только одну рациональную координату;

в) множество точек плоскости, имеющих ровно две рациональные координаты?

1191. *Областью* называется всякое связное открытое множество. Выяснить, какие из следующих множеств точек пространства TE_3 будут областями:

а) открытая полуплоскость;

б) открытый тор, т. е. множество всех точек, принадлежащих внутренней части тора;

в) множество точек, удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, где $a \neq 0$;

г) множество всех точек двух открытых кругов, не имеющих общих точек;

д) множество всех точек пространства TE_3.

1192. Выяснить, какие из следующих множеств точек пространства TE_3 являются компактными:

а) конечное множество точек $P_1, \ldots, P_k$;

б) открытый круг, т. е. множество всех точек M, удовлетворяющих условию $|OM| < r$, где $r > 0$;

в) множество, состоящее из всех точек внутренней области, а также точек поверхности тора (см. задачу 1123);

г) бесконечное множество точек числовой оси OX с координатами $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

1193. Доказать, что замкнутое подмножество компактного множества есть компактное множество.

1194. Показать, что объединение конечного числа компактных множеств есть компактное множество. Привести пример, показывающий, что объединение бесконечного числа компактных множеств не всегда является компактным множеством.

§ 55. Непрерывные отображения и гомеоморфизмы

Отображение $f\colon R \to R'$, где R и R' — топологические пространства, называется *непрерывным*, если для любой точки $a \in R$ и любой окрестности V точки $b = f(a) \in R'$ существует окрестность U точки a, что $f(U) \subset V$, т. е. для любой точки $x \in U$, $f(x) \in V$.

Непрерывное отображение множества R на множество R' $f\colon R \to R'$ называется *гомеоморфизмом*, если f взаимно-однозначно и обратное отображение f^{-1} также непрерывно. Пространства R и R' в этом случае называются *гомеоморфными* или *топологически эквивалентными*.

1. Непрерывные отображения

1195. Доказать, что следующие отображения являются непрерывными:

а) $f_1\colon \Pi_2 \to a$, где Π_2 — евклидова плоскость, a — прямая этой плоскости, f_1 — ортогональное проектирование плоскости на прямую;

б) $f_2\colon \Pi_2 \to \Pi_2'$, где Π_2 и Π_2' — две евклидовы плоскости, на которых заданы соответственно системы координат OXY и $O'X'Y'$, f_2 определяется соотношениями $x' = x + y$, $y' = x - y$;

в) $f_3\colon S \to M_0$, где S — некоторое топологическое пространство, M_0 — фиксированная точка этого пространства;

г) $f_4\colon S \to \Pi_2$, где S — сфера пространства TE_3, Π_2 — плоскость, касательная к сфере, а f_4 — ортогональное проектирование точек сферы на плоскость.

1196. Показать, что функции

$$x = u, \ y = v, \ z = \begin{cases} u^2 + v^2, & \text{при } u \geqslant 0, \ -\infty < v < \infty \\ -u^2 - v^2, & \text{при } u < 0, \ -\infty < v < \infty \end{cases}$$

в TE_3 определяют взаимно-однозначное отображение (u, v)-плоскости R^2 на множество точек S, состоящее из двух половин эллиптического параболоида (см. рис. 9). Является ли это отображение непрерывным на R^2? В случае отрицательного ответа найти множество точек плоскости R^2, в которых нарушается непрерывность.

1197. Показать, что функции

$$x = u, \ y = v, \ z = \begin{cases} \sqrt{1 - u^2 - v^2}, & \text{при } u^2 + v^2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{при } u^2 + v^2 > 1 \end{cases}$$

в TE_3 определяют взаимно-однозначное и непрерывное отображение (u, v)-плоскости на множество точек, состоящее из полусферы и части плоскости (см. рис. 10).

1198. Дано отображение $f: R \to R'$, где R и R' — топологические пространства. Доказать следующие предложения:

а) отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества из R' открыт в R;

б) отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого множества есть замкнутое множество.

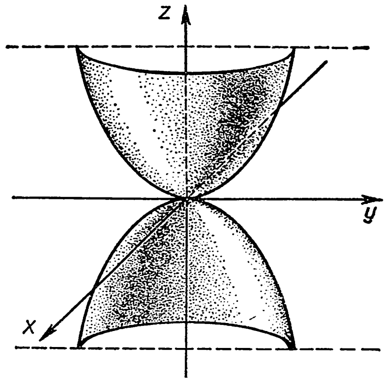


Рис. 9

1199. Пусть при непрерывном отображении f множество M переходит в множество $M' = f(M)$. Показать, что если A — предельная точка множества M, то $f(A)$ — предельная точка множества M'.

1200. Доказать, что при непрерывном отображении образ компактного множества является компактным множеством.

1201. Справедливо ли следующее утверждение, обратное утверждению задачи 1200: при непрерывном отображении прообраз компактного множества есть компактное множество?

1202. Доказать, что при непрерывном отображении образ связного множества является связным множеством.

1203. Справедливо ли следующее предложение, обратное утверждению задачи 1202: при непрерывном отображении прообраз связного множества является связным множеством?

1204. Даны два множества S и F в TE_3 и некоторое отображение $\varkappa: S \to S'$ множества S на множество S', где $S' \subset F$. Доказать, что отображение $\varkappa$ является непрерывным на S, если оно удовлетворяет условию: для произвольного замкнутого множества A, принадлежащего F, множество точек P из S, для которых $\varkappa(P) \subset A$, является замкнутым в TE_3.

2. Гомеоморфизмы; топологически эквивалентные пространства

1205. Доказать, что соотношения $x = \cos u$, $y = \sin u$ $(0 \leqslant u < 2\pi)$ определяют взаимно-однозначное и непрерывное отображение $\varkappa: U_1 \to S$, где $U_1 = \{u: 0 \leqslant u < 2\pi\}$, а S — окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Является ли $\varkappa$ гомеоморфизмом? Объяснить результат.

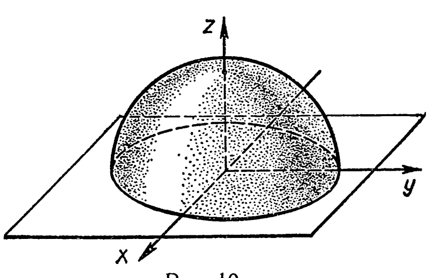


Рис. 10

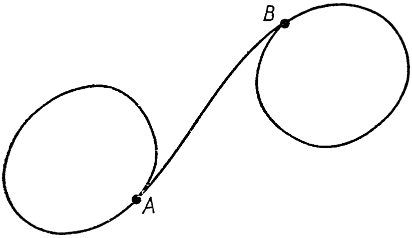


Рис. 11

1206. Доказать, что соотношения $x = \cos u$, $y = \sin u$, $0 \leqslant u \leqslant \pi$ определяют гомеоморфное отображение числового отрезка $0 \leqslant u \leqslant \pi$ на полуокружность S_1 окружности S (см. задачу 1205), расположенную в полуплоскости $y \geqslant 0$.

1207. Доказать, что аффинное отображение плоскости Π на плоскость Π' в пространстве TE_3 является примером гомеоморфизма.

1208. Доказать теорему: если $\varkappa$ — взаимно-однозначное и непрерывное отображение компактного множества S, принадлежащего TE_3, в множество F, то $\varkappa$ является гомеоморфным отображением S на $S' = \varkappa(S)$.

1209. Доказать, что следующие пространства гомеоморфны между собой:

а) интервал и прямая;

б) внутренность круга и множество всех точек плоскости TE_2;

в) внутренность шара и множество всех точек евклидова пространства TE_3;

г) плоскость и сфера без одной точки в пространстве TE_3;

д) евклидово пространство TE_3 и трехмерная сфера с выколотой точкой в пространстве TE_4.

1210. Противоположные стороны вытянутого бумажного прямоугольника приклеиваются друг к другу (возможно с некоторыми перекручиваниями). Показать, что полученная поверхность гомеоморфна либо боковой поверхности цилиндра, либо листу Мебиуса.

1211. На евклидовой плоскости TE_2 заданы две дуги L и L' регулярных кривых, длины которых равны. Под наложением дуги L на дугу L' мы будем понимать отображение $\lambda\colon L \to L'$, удовлетворяющее условию: если $M' = \lambda(M)$, а $N' = \lambda(N)$, то дуги MN и $M'N'$ имеют одинаковые длины.

Показать, что в следующих случаях наложения не являются гомеоморфизмами, хотя они непрерывны и взаимно-однозначны:

а) полуинтервал накладывается на окружность;

б) интервал накладывается на пространство «восьмерку» так, что концы совпадают с центром;

в) интервал накладывается на фигуру, изображенную на рисунке 11, так, что концы интервала совпадают с концами A и B.

1212. Показать: а) отрезок, интервал и полуинтервал не гомеоморфны между собой; б) отрезок и квадрат не гомеоморфны между собой.

3. Эйлерова характеристика поверхности

Говорят, что система кривых $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ производит *клеточное разбиение поверхности* S, если выполнены следующие условия:

а) каждая из кривых γ_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) гомеоморфна замкнутому отрезку;

б) общими точками двух различных кривых γ_1 и γ_2 могут быть только их концы;

в) из каждого конца кривой γ_i исходит по меньшей мере еще одна кривая γ_j ($i \neq j$);

г) кривые $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ разбивают поверхность S на клетки $G_1, G_2, \ldots, G_n$; каждая клетка G_i гомеоморфна открытому кругу, две клетки G_i и G_j ($i \neq \gamma$) не имеют общих точек; граница каждой клетки состоит из нескольких кривых;

д) каждая из кривых γ_i служит частью границы двух и только двух клеток;

е) $S = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_k$.

Каждая из кривых $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ называется ребром клеточного разбиения, их концы — вершинами.

Число $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$, где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ — соответственно число вершин, ребер, клеток некоторого клеточного разбиения поверхности, называется эйлеровой характеристикой.

1213. Доказать, что не существует выпуклого многогранника, все грани которого — шестиугольники.

1214. Найти эйлерову характеристику сферы, тора, кренделя с двумя отверстиями.

1215. Пусть дан квадрат $ABCD$. Склеим точки отрезков AB и CD, лежащие на одной прямой, параллельной стороне AD. Склеим точки отрезков BC и AD, лежащие на одной прямой, проходящей через центр квадрата. Полученная поверхность называется бутылкой Клейна. Найти эйлерову характеристику бутылки Клейна.

1216. Найти эйлерову характеристику проективной плоскости.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Справедливы предложения а), б), д) и е). Двойственны друг другу предложения б) и г), а также в) и д). Предложения а) и е) двойственны себе. **3.** Указание. Через прямую и не инцидентную ей точку проходит одна и только одна плоскость; две плоскости всегда пересекаются по одной прямой. **8.** Указание. Применить теорему Дезарга. **9.** Указание. Применить обратную теорему Дезарга к трехвершинникам ABC и RST. **10.** Указание. Применить теорему Дезарга к трехвершинникам $AA'A''$ и $BB'B''$. **11.** Указание. Применить несколько раз теорему Дезарга к трехвершинникам, расположенным в соответственных гранях данного тетраэдра. **12.** Указание. Пусть, например M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24} лежат на одной прямой. Пользуясь обратной теоремой Дезарга, сначала показать, что трехвершинники $A_1A_2A_4$ и $B_1B_2B_4$ имеют центр перспективы P, а трехвершинники $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ имеют центр перспективы Q. Легко видеть, что точки P и Q совпадают, так как $P = Q = (A_1A_2) \cap (B_1B_2)$. Отсюда следует утверждение б). Для обоснования утверждения а) применить теорему Дезарга к трехвершинникам $A_2A_3A_4$ и $B_2B_3B_4$. **13.** Указание. Построить вспомогательную точку S так, чтобы для трехвершинников CQX и SPY точка R была центром перспективы, а прямая AB — осью перспективы (рис. 12): $S = (CR) \cap (PM)$, где $M = (AB) \cap (CQ)$. Тогда точка Y определяется так: $Y = (SB) \cap (AC)$. **15.** Если a — несобственная прямая плоскости α и b — собственная прямая, то они скрещиваются в том и только в том случае, когда прямая b не параллельна плоскости α. Две несобственные прямые не могут быть скрещивающимися, так как все несобственные прямые лежат в одной и той же несобственной плоскости. **16.** Указание. Рассмотреть все те случаи, когда одна или несколько точек, прямых, плоскостей (A, B, C, a, Π, Π_1, Π_2) — несобственные. **18.** Указание. См. задачу 284. **19.** Медианы любого треугольника пересекаются в одной точке. **20.** Например, теорема Дезарга в случае а) формулируется так: если треугольники ABC и $A'B'C'$ расположены так, что $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$, то точки $(BC)\cap(B'C')$, $(AB)\cap(A'B')$ и $(AC) \cap (A'C')$ коллинеарны. В случаях б) и в) теоремы, обратные теореме Дезарга, формулируются так: б) если $(AB) \parallel (A'B')$, $(AC) \parallel (A'C')$, $(BC) \parallel (B'C')$ и $(AA') \nparallel (BB')$, то треугольники ABC и $A'B'C'$ гомотетичны; в) если $(AB) \parallel (A'B')$, $(AC) \parallel (A'C')$, $(BC) \parallel (B'C')$ и $(AA') \parallel (BB')$, то и $(CC') \parallel (BB')$. **21.** а) $-\dfrac{d}{c}$, $-\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{b-d}{c-a}$; б) $\dfrac{a}{c}$, $\dfrac{b}{d}$, $\dfrac{a+b}{c+d}$. **22.** $x' = \dfrac{5x+10}{-2x+1}$. **23.** а) $\rho x_1 = x_2'$; $\rho x_2 = x_1'$; б) $\rho x_1 = 4x_1' - x_2'$; $\rho x_2 = 2x_1' - 2x_2'$; в) $\rho x_1 = ax_1'$; $\rho x_2 = bx_2'$. **24.** Указание. Если $(d_1' : d_2')$ — координаты точки D относительно системы координат ABC, то $(ABCD) = \dfrac{d_1'}{d_2'}$. Найдите координаты точки D относительно системы координат ABC. **25.** Указание. См. задачу 24. **26.** Указание. См. задачу 25 б). **27.** Указание. См. задачу 26. **28.** Указание. См. задачу 24. **29.** Указание. См. задачу 25 а). **30.** Указание. См. задачу 25 б). **31.** Указание. Пусть $R = (BD) \cap (PQ)$.

Спроектировать точки P, Q, N, R из точки B на прямую AN. **32.** Указание. См. задачу 31. **33.** Указание. По определению гармонической сопряженности $K_1 = (C_2C_3) \cap (A_2A_3)$ и т. п.; применить теорему Дезарга сначала к трехвершинникам $A_1A_2A_3$ и $C_1C_2C_3$, а затем к трехвершинникам $A_1A_2A_3$ и $C_1K_2K_3$. **34.** Указание. Пусть $O = l_1 \cap l_2$; a, b, c — соответственно прямые OA, OB и OC. Применить соотношение:

$$(l_1l_2ab)(l_1l_2bc)(l_1l_2ca) = 1$$

(см. задачу 28). **35.** Указание. Воспользоваться гармоническими свойствами полного четырехвершинника. **36.** Указание. Многократно использовать построение задачи 35, учитывая формулы, приведенные в задачах 26, 27 и 29. Например, для построения точки $A(-2)$ сначала построить вспомогательную точку $M(-1)$ (см. задачу 35), а далее воспользоваться задачей 27. **37.** Указание. Принять точки A, B, C за координатную систему и воспользоваться указанием к задаче 36. **38.** Решение. При $n = 2$ имеем: $(ABCX) = 2 \Rightarrow (ACBX) = -1 \Rightarrow AC \overset{h}{-} BX$; далее см. задачу 29. Пусть $n > 2$. Предположим, что мы знаем способ построения точки Y, удовлетворяющей условию $(M_1M_2M_3Y) = (n-1)$, где M_1, M_2 и M_3 — три коллинеарные построенные точки. Построим точку Y_{n-1} так, чтобы $(ACBY_{n-1}) = n-1$. Тогда точка X находится из соотношения: $AC \overset{h}{-} Y_{n-1}X$. В самом деле, $(ACBX) = \dfrac{(ACBY_{n-1})}{(ACXY_{n-1})} = 1 - n = \dfrac{n-1}{(ACXY_{n-1})} \Rightarrow (ACXY_{n-1}) = -1$. Таким образом, построение искомой точки X сводится к последовательному построению точек Y_2, Y_3, ... Y_{n-1}, $Y_n = X$, удовлетворяющих условиям $(ACBY_k) = k$, где $k = 2, 3, \dots n$. Эти точки могут быть построены путем многократного повторения построения, описанного в задаче 35. **39.** Указание. Пересечь данные прямые a, b, c прямой l, не проходящей через центр пучка. **40.** Указание. а) См. задачу 31; б) рассмотреть прямую, параллельную d и не проходящую через точку $a \cap b$. **41.** Указание. Спроектировать точки A, B, C, D из точки K на прямую b и воспользоваться задачей 40 а). **42.** Если b — несобственная прямая, получаем предложения: 1) медианы треугольника пересекаются в одной точке; 2) прямая, соединяющая середины двух сторон треугольника, параллельна третьей стороне. Указание. См. задачу 40 а). **43.** Пусть при преобразовании π различные точки A, B и C прямой l переходят соответственно в точки A', B' и C' прямой l', причем $(AA') \neq l$ и $(AA') \neq l'$. Если O_1 и O_2 — точки прямой AA', не лежащие на прямых l и l', а $K = O_1B \cap O_2B'$; $L = O_1C \cap O_2C'$, то $\pi = \sigma_2\sigma_1$, где σ_1 и σ_2 — искомые перспективные отображения с центрами в точках O_1 и O_2; σ_1: $(l) \overset{O_1}{\to} (l_1)$ и σ_2: $(l_1) \overset{O_2}{\to} (l')$, где $l_1 = KL$. **44.** Указание. Рассмотреть перспективное отображение π: $[A] \to [C]$, при котором $\pi(AC) = (CA)$, $\pi(AA') = (CA')$, $\pi(AB') = (CB')$. Пересечь пучки $[A]$ и $[C]$ соответственно прямыми BA' и BC'. **45.** Указание. В обозначениях задачи 44 принять точки A и A' за центры пучков прямых, которые соответствуют прямым g и g', и положить $(AB) = a$, $(AB') = b$, $(AC') = c$, $(A'B') = a'$, $(A'B) = c'$, $(A'C) = b'$. **46.** Если π перспективное отображение, то прямая h проходит через точку $K = g \cap g'$. В противном случае $h \cap g' = \pi(K)$, $h \cap g = \pi^{-1}(K)$. Указание. Пусть $A_1' \neq A_1$, M — произвольная точка прямой g, а $M' = \pi(M)$. Рассмотреть отображение $\bar{\sigma}$: $[A_1] \to [A_1']$, при котором прямая A_1M' переходит в прямую $A_1'M$. Показать, что $\bar{\sigma}$ — перспективное отображение пучков

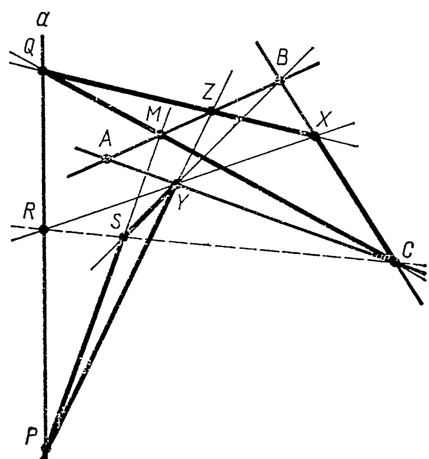


Рис. 12

$[A_1]$ и $[A_1']$ с осью h. Затем воспользоваться теоремой Паппа (задача 44). **48.** Прямая, проходящая через точку A. **49.** Указание. Показать, что отображение $\bar{f}$: $[P_{13}] \to [P_{23}]$, при котором $(P_{23}M_2) = \bar{f}\,(P_{13}M_1)$, является проективным. Далее следует показать, что это отображение является перспективным с осью, проходящей через точку $a_1 \cap a_2$. **50.** Прямая, проходящая через точки $(BO') \cap (AC)$ и $(CO) \cap$ $\cap\,(AB)$. **52.** Указание. См. задачу 51. Учесть, что существует перспективное отображение λ: $(g) \overset{K}{\to} (l)$, при котором точкам M, N, A, A' соответствуют точки M, L, O, O', где $K = h \cap (OA)$, $L = h \cap l$ (обозначения задачи 51). **53.** Указание. Пусть a и b — произвольные различные прямые, проходящие через точку A, а c — прямая, проходящая через B, причем $a \neq g$, $b \neq g$, $c \neq g$. Показать, что $\pi =$ $= \sigma_3\sigma_2\sigma_1$, где σ_1: $g \overset{O}{\to} a$; σ_2: $a \overset{B}{\to} b$, σ_3: $b \overset{K}{\to} g$; $O = b \cap c$; $K = a \cap c$. **54.** Указание. σ есть произведение двух перспективных отображений. **55.** Указание. См. задачу 43 или 46. **56.** Указание. См. задачу 55. **57.** Указание. Задача двойственна задаче 55. **58.** Указание. Задача двойственна задаче 56. **59.** Указание. Спроектировав точки A, B, C на прямую g', отличную от g из какой-либо точки O. не лежащей на прямых g и g', задачу свести к задач 55. **60.** Указание. Задача двойственна предыдущей. **61.** Указание. См. задачу 51. **62.** Указание. Решение основано на задаче, аналогичной задаче 51, сформулированной для параболического проективного преобразования. В этом случае прямая h (см. задачу 51) проходит через точку P. **63.** Указание. Задача двойственна задаче 61. **64.** Указание. См. задачу 51. **66.** Неподвижные точки π — точки D и K, где $KD \overset{h}{-} BC$. Указание. Показать, что $C = \pi\,(B)$, $B = \pi\,(C)$, $D = \pi\,(D)$. **67.** Если π — тождественное преобразование, а σ — любая инволюция, то $\pi =$ $= \sigma \cdot \sigma$. Если π отлично от тождественного преобразования, возьмем точку A так, что точки A, $B = \pi\,(A)$ и $C = \pi\,(B)$ различны. Рассмотрим преобразование τ_1, определяемое условиями: $C = \tau_1\,(A)$, $B = \tau_1\,(B)$, $A = \tau_1\,(C)$ и τ_2: $\tau_1\pi$. Тогда τ_1 и τ_2 — инволюции, причем $\pi = \tau_1^{-1}\tau_2$. Заметим, что заданием преобразования π инволюции τ_1 и τ_2 не определяются однозначно. **68.** Указание. Пусть $A = (PQ) \cap g$, $A' = (RS) \cap g$, $B = (PR) \cap g$, $B' = (OS) \cap g$, $C = (PS) \cap g$, $C' = (QR) \cap g$; достаточно доказать, что $(AA'BC) = (A'AB'C')$. Для этого спроектировать точки A, A', B, C из P на (RS), а затем полученные точки — из Q на g. **69.** Указание. Пусть прямые AA_0', BB_0', CC_0' принадлежат пучку $[O]$ (см. рис. 1). Применить теорему Паппа-Дезарга к четырехвершиннику $ABCO$. Обратно: пусть $O = (AA_0') \cap (BB_0')$, а $C_1 = (OC) \cap l$. Применив теорему Паппа-Дезарга к четырехвершиннику $ABCO$, показать, что $C_1 = C_0'$. **70.** Указание. Пусть $O' = (A'A_0) \cap (B'B_0)$. Применить теорему Паппа-Дезарга сначала к четырехвершиннику $ABCO$, а затем к четырехвершиннику $A'B'C'O'$. **71.** Указание. Сначала показать, что пары A_0A_0', B_0B_0', C_0C_0' являются сопряженными парами одной и той же гиперболической инволюции с неподвижными точками P и Q. Пусть $O = (AA_0') \cap (BB_0')$. Применяя теорему Паппа-Дезарга к четырехвершиннику $ABCO$, показать, что прямая CO проходит через точку C_0'. **72.** Указание. Предложение двойственно задаче 69. **75.** а) $x' =$ $= \dfrac{15x - 15}{x - 17}$; б) $x' = \dfrac{x + 1}{3x - 1}$; в) $x' = 2x - 3$. **76.** $O_1\,(\infty)$ и точка $O_2\,(2)$. **77.** Точки с координатами 2 и -1. **78.** $h = 8$ или $h = -4$. **79.** $x' = \dfrac{x - 4}{x + 5}$. **80.** Указание. На прямой g взять систему координат $AA'K$ и рассмотреть аналитическое задание инволюции σ. **82.** $x' = ax$, где $a \neq 0$. Указание. См. предыдущую задачу. **83.** $x' = \dfrac{1}{x}$; $D\,(1)$; $K\,(-1)$, где $KD \overset{h}{-} BC$. **84.** $ad - bc > 0$; $ad - bc < 0$. Указание. Найти производную $\dfrac{dx'}{dx}$. **85.** Указание. См. ответ к задаче 84. При $c \neq 0$ дискриминант уравнения для координаты неподвижной точки представить в виде $(a + d)^2 - 4\,(ad - bc)$. **86.** Точка $A\,(x)$ может быть взята произвольно; координата y точки B находится из уравнения:

$$(x^2 - k^2)\, y^2 + 4k^2xy - k^2 (x^2 - k^2) = 0,$$

корни которого всегда действительны. **87.** $\rho x_1' = 5x_1 - 3x_2$; $\rho x_2' = 5x_1$. **88.** $(1: \sqrt{2} - 1)$, $(1: -\sqrt{2} - 1)$. Указание. Для определения координат неподвижных точек, не нарушая общности, можно положить: $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$. **89.** Указание. См. указание к задаче 88. **90.** Указание. Принять M и N за координатные точки O_1 и O_2; далее см. задачи 82 и 25. **91.** Указание. См. задачу 90. **92.** Указание. См. задачу 90. **93.** Гомотетия с центром в точке B и коэффициентом подобия, равным 2. **94.** Симметрия относительно точки B. **95.** Указание. Принять точку O за начало декартовой системы координат на прямой. **96.** Указание. Пусть $O = (PQ) \cap g$; в силу известных теорем элементарной геометрии $|OP| \cdot |OQ| = |OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'| = |OC| \cdot |OC'|$. См. задачу 95. **98.** $O_1\,(1:0:0)$ $O_2\,(0:1:0)$, $O_3\,(0:0:1)$, $E\,(1:1:1)$, $E_1\,(0:1:1)$, $E_2\,(1:0:1)$, $E_3\,(1:1:0)$, $P_1\,(2:1:1)$, $P_2\,(1:2:1)$, $P_3\,(1:1:2)$. Указание. Для определения координат точек P_1, P_2, P_3 воспользоваться условием коллинеарности трех точек. **99.** $D\,(-2:2:3)$. Указание. Представить координаты c_i и d_i точек C и D в форме: $c_i = \lambda_1 a_i + \mu_1 b_i$, $d_i = \lambda_2 a_i + \mu_2 b_i$, где a_i, b_i — координаты точек A и B; $i = 1, 2, 3$. Затем принять точки A и B за координатные, вследствие чего C и D получат однородные координаты $(\lambda_1 : \mu_1)$ и $(\lambda_2 : \mu_2)$. См. также задачу 24. **100.** $D\,(4:0:-1)$. Указание. Введя обозначения $A\,(a_1 : a_2 : a_3)$, $B\,(b_1 : b_2 : b_3)$, $C\,(c_1 : c_2 : c_3)$, $D\,(d_1 : d_2 : d_3)$, представить c_i в виде $a_i + b_i$, тогда $d_i = a_i - b_i$ $(i = 1, 2, 3)$. См. указание к задаче 99. **101.** а) $3x_1 + x_2 - x_3 = 0$; б) $x_1 - x_2 = 0$; в) $17x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0$. **102.** а) $x_2 = x_3$, $x_1 = x_3$, $x_1 = x_2$; б) $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 - x_3 = 0$; в) $x_1 - 2x_3 = 0$, $x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$. **103.** $M_{23}\,(0:1:-1)$, $M_{13}\,(1:0:-1)$, $M_{12}\,(1:-1:0)$; $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. **104.** $B\,(-1:1:1)$, $C\,(1:-1:1)$, $D\,(1:1-1)$; AB: $x_2 - x_3 = 0$, AC: $x_1 - x_3 = 0$, AD: $x_1 - x_2 = 0$, BC: $x_1 + x_2 = 0$, BD: $x_1 + x_3 = 0$; CD: $x_2 + x_3 = 0$. **105.** Указание. Пусть $N\,(n_1 : n_2 : n_3)$, где $n_i = \rho_1 k_i + \rho_2 l_i$, $i = 1, 2, 3$; подобрать числа ρ_1 и ρ_2 так, чтобы исключились c_1, c_2 и c_3. **106.** $I = 1$; $I = -1$. **107.** $AB\,(3:1:-1)$, $CD\,(1:-1:0)$, $LM\,(17:7:-2)$; нет. **108.** $u_1 = a_2b_3 - a_3b_2$; $u_2 = a_3b_1 - a_1b_3$; $u_3 = a_1b_2 - a_2b_1$. **109.** $x_i = (u_1b_1 + u_2b_2 + u_3b_3)\, a_i - (u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3)\, b_i$, $i = 1, 2, 3$. **110.** Указание. $O_2O_3 \stackrel{h}{-} E_1K$ или $K = O_2O_3 \cap E_2E_3$; $L = O_1O_2 \cap E_1E_2$; $P = O_2E \cap E_1E_3$; $Q = O_1K \cap O_2E$, где $E_1 = O_1E \cap O_2O_3$, $E_2 = O_2E \cap O_3O_1$, $E_3 = O_3E \cap O_1O_2$. **111.** Указание. Для каждой из прямых достаточно построить две ее точки (см. задачу 110). **112.** а) $\rho x_1 = x_3'$, $\rho x_2 = x_1'$, $\rho x_3 = x_2'$; б) $\rho x_1 = x_2'$, $\rho x_2 = x_1'$, $\rho x_3 = x_3'$; в) $\rho x_1 = x_1' - x_3'$, $\rho x_2 = x_2' - x_3'$, $\rho x_3 = -x_3'$. **113.** $\rho x_1' = -6x_1$; $\rho x_2' = 3x_2$; $\rho x_3' = 2x_3$. **114.** $\rho x_1 = 5x_1' - 3x_3'$, $\rho x_2 = 5x_1' + x_2' - 3x_3'$, $\rho x_3 = -2x_2' - 3x_2'$. **115.** $(1:5:0)$. **116.** $u_i' = a_{1i}u_1 + a_{2i}u_2 + a_{3i}u_3$, $i = 1, 2, 3$. **117.** Указание. Пусть $A_1A_2A_3D$ — система координат, в которой прямая l имеет уравнение $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Так как $A_1 \notin l$, $A_2 \notin l$ и $A_3 \notin l$, то $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$, $u_3 \neq 0$. Рассмотреть преобразование координат $\rho x_1' = u_1x_1$, $\rho x_2' = u_2x_2$, $\rho x_3' = u_3x_3$. **118.** Указание. Принять вершины трехвершинника $A_1A_2A_3$ за базисные точки системы координат. **119.** Указание. Пусть в системе координат $O_1O_2O_3E$ имеем: $A_1\,(0 : x_2 : x_3)$, $A_2\,(y_1 : 0 : y_2)$, $A_3\,(z_1 : z_2 : 0)$. Сначала показать, что данное в задаче условие эквивалентно следующему: $\frac{x_2}{x_3} \cdot \frac{y_3}{y_1} \cdot \frac{z_1}{z_2} = 1$. **120.** Указание. Принять точки A, B, C за первую, вторую и третью координатные точки; по координатам $(a_1 : a_2 : a_3)$, $(b_1 : b_2 : b_3)$, $(c_1 : c_2 : c_3)$ точек A_1, B_1, C_1 найти координаты всех прямых, фигурирующих в условии задачи. **121.** Указание. Принять прямые A_1A_2, A_3A_4 и A_2A_3 за стороны координатного трехвершинника. Учесть, что если прямые принадлежат одному пучку, то левые части их уравнений линейно зависимы. **122.** Указание. Для упрощения вычислений в качестве системы координат взять точки A_1, A_2, A_3, E, где точка E выбрана так, чтобы прямая p имела уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (см. задачу 117). **123.** Указание. Возьмем точку $E \in AP$, $E \neq A$,

$E \not\equiv P$ и рассмотрим систему координат $ABCE$. В этой системе точка P имеет координаты $(0:1:1)$, поэтому уравнение прямой l можно записать в виде $\lambda x_1 + \mu(x_2 - x_3) = 0$. Найти уравнение прямой LM и показать, что эта прямая при любых λ и μ проходит через точку $(0:1:2)$. Возможно синтетическое решение: заметьте, что $BQ \overset{h}{=} PC$. **125.** $\rho x_1' = x_2 - x_3$; $\rho x_2' = x_1 - x_3$; $\rho x_3' = -x_3$. **126.** $\rho x_1' = -2x_1 - x_2 + x_3$; $\rho x_2' = x_1 - 2x_2 - 3x_3$; $\rho x_3' = x_1 - 2x_2 + 2x_3$. **127.** $\rho x_1' = -2x_1 + 2x_3$, $\rho x_2' = 4x_3$, $\rho x_3' = -x_2$. **128.** $\rho x_1' = x_1 + x_2 - x_3$, $\rho x_2' = -2x_1 + x_2 + 3x_3$, $\rho x_3' = -x_1 - x_2 + 4x_3$. **129.** $(ACE_2M_2) = (A'C'E_2'M_2')$; $(BCE_1M_1) = (B'C'E_1'M_1')$, где $E_1 = AE \cap BC$, $E_2 = BE \cap AC$, $M_1 = AM \cap BC$, $M_2 = BM \cap AC$; аналогичные обозначения применены и для точек со штрихами. У к а з а н и е. Учесть, что координаты точки M по отношению к системе координат $ABCE$ должны быть равны координатам точки M' относительно системы координат $A'B'C'E'$. **130.** Неподвижными точками будут A $(1:6:5)$, B $(1:1:0)$, C $(0:0:1)$; инвариантными прямыми будут BC $(1:-1:0)$, AC $(6, -1, 0)$, AB $(1, -1, 1)$. У к а з а н и е. Для отыскания координат $(x_1 : x_2 : x_3)$ неподвижной точки следует в уравнениях, определяющих коллинеацию, положить $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$. Мы приходим к системе однородных уравнений относительно x_1, x_2, x_3, которая должна допускать ненулевые решения. Приравнивая нулю определитель этой системы, получим х а р а к т е р и с т и ч е с к о е у р а в н е н и е к о л л и н е а ц и и:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \end{vmatrix} = 0.$$

Каждому корню этого уравнения отвечает (по меньшей мере одна) неподвижная точка коллинеации.

Аналогичным образом поступаем и при разыскивании инвариантных прямых коллинеации. **131.** $\rho x_1' = x_3$, $\rho x_2' = -x_1 + x_3$, $\rho x_3' = -x_2 + x_3$. Единственная неподвижная точка: $(1:0:1)$. У к а з а н и е. См. указание к задаче 130. **132.** $\rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{13}x_3$, $\rho x_2' = a_{22}x_2 + a_{23}x_3$, $\rho x_3' = a_{33}x_3$, $a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0$. **133.** $\rho x_1' = a_{11}x_1$, $\rho x_2' = a_{22}x_2$, $\rho x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$, $a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0$. **134.** У к а з а н и е. Ввести в рассмотрение проективную систему координат и воспользоваться указанием к задаче 130. **135.** У к а з а н и е. Применить теорему Дезарга к произвольному трехвершиннику ABC и его образу $A'B'C'$ в коллинеации π, где A, B, C не лежат на прямой g. **136.** У к а з а н и е. Сначала показать, что любая прямая, проходящая через точку O, является инвариантной. Далее взять произвольный трехвершинник ABC, вершины которого не совпадают с точкой O, рассмотреть образ $A'B'C'$ этого трехвершинника и применить к ним теорему Дезарга. **137.** У к а з а н и е. Принять точки $(OA) \cap g$ и A соответственно за базисные точки O_1, O_3 координатной системы $O_1O_2O_3E$ $(O_2 \in g)$. Предложение можно доказать также без помощи координат. **138.** У к а з а н и е. Учесть, что если $M' = \pi(M)$, $N' = \pi(N)$, то $(MN) \cap (M'N') \subset g$. **139.** У к а з а н и е. Рассмотреть проективное преобразование, при котором точки A_1, A_2, A_3, E переходят соответственно в точки B_1, B_2, B_3, E. **140.** У к а з а н и е. Рассмотреть коллинеацию π, при которой $E = \pi(E)$, $A_1 = \pi(E_1)$, $A_2 = \pi(E_2)$ и $A_3 = \pi(E_3)$. Из предложения задачи 136 следует, что π — гомология с центром в точке E. Пусть $M_1' = \pi(M_1)$, $M_2' = \pi(M_2)$, $M_3' = \pi(M_3)$ (см. рис. 6). Прямые A_1M_1', A_2M_2' и A_3M_3' принадлежат одному пучку $[P']$, поэтому $(A_2A_3E_1M_1') \times (A_3A_1E_2M_2')(A_1A_2E_3M_3') = 1$ (1) (см. задачу 119). Кроме того, $(A_2A_3E_1M_1') = (A_3A_2E_1N_1)$, $(A_3A_1E_2M_2') = (A_1A_3E_2N_2)$ и $(A_1A_2E_3M_3') = (A_2A_1E_3N_3)$ (2), где $N_1 = A_1M_1 \cap A_2A_3$, $N_2 = A_2M_2 \cap A_3A_1$ и $N_3 = A_3M_3 \cap A_1A_2$. Например, для вывода первого из соотношений (2) следует спроектировать точки A_2, A_3, E_1, M_1' из точки E на прямую E_2E_3, а затем полученные точки из A_1 на (A_2A_3). Подставив выражения (2) в (1), с помощью предложения задачи 119 получаем искомый результат. Задачу можно решить аналитически. **141.** Указание. См. задачу 118. Рассмотреть точки $K_1 = (E_2E_3) \cap (A_2A_3)$, $K_2 = (E_1E_3) \cap (A_1A_3)$, $K_3 = (E_1E_2) \cap (A_1A_2)$. Далее см. указание к задаче 140. Возможно аналитическое решение. **142.** **Указание.** Рассмотреть преобразование, индуцируемое гомологией π на прямой OM. **143.** Указание. Показать, что прямые AA' и BB' — инвариантные прямые преобразования π. Рассмотрев преобразования, индуцируемые преобразованием π на этих прямых, найти неподвижные точки P, Q коллинеации π, отличные от неподвижной точки $O = (AA') \cap (BB')$. Установить далее, что прямые AB, $A'B'$ и PQ инцидентны одной и той же точке R, а (PQ) — неподвижная прямая π. См. также задачу 142. **144.** Указание. Пусть $(A_2A_3) = g_1$, $(A_1A_3) = g_2$, $E_i = (A_iE) \cap g_i$; $E_i' = (A_iE') \cap g_i$; $M_i = (A_iM) \cap g_i$; $L_i = a \cap g_i$; $i = 1, 2$. На каждой из прямых g_1 и g_2 коллинеация σ индуцирует гиперболическое проективное преобразование с данными двойными точками и с данной парой соответствующих точек: E_1 и E_1' на прямой g_1 и E_2, E_2' на прямой g_2. Далее см. задачу 61. **145.** См. рис. 13. Указание. π индуцирует проективное отображение σ: $(AD) \to (A'D')$, при котором $A' = \sigma(A)$, $D' = \sigma(D)$ и $E' = \sigma(E)$. Поэтому, применяя построение задачи 55, сначала строим образы $1'$ и $2'$ точек $1 = (BM) \cap (AD)$ и $2 = (CM) \cap (AD)$, а потом

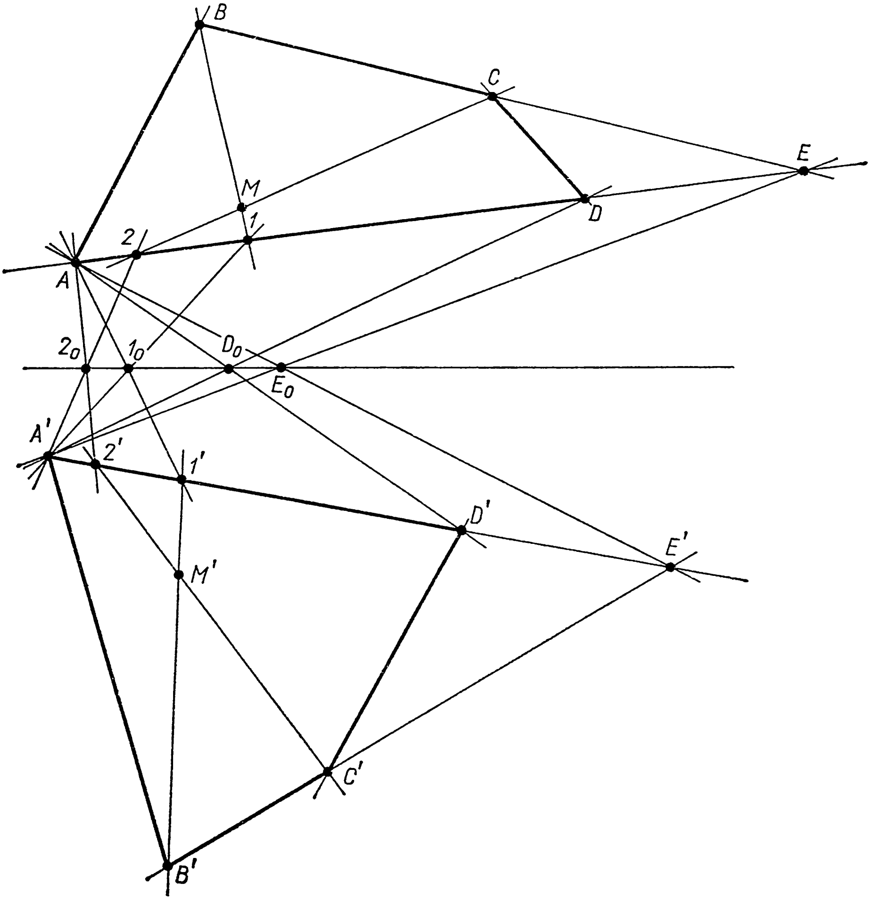


Рис. 13

образ точки M. **146.** Указание. См. указание к задаче 145. **149.** Указание. Построить прямую $a' = \pi(a)$. **150.** Указание. Через точку O провести две произвольные прямые, не проходящие через точку P; далее см. задачу 148. **151.** Прямые AA', BB' и CC' принадлежат одному пучку. Указание. Применить теорему Дезарга. **152.** Указание. Плоскость ω', отличную от ω, можно провести через ось гомологии g произвольным образом; также произвольно может быть выбран (вне ω и ω') центр O первого проектирования. **153.** $\rho x_1' = 3x_1$, $\rho x_2' = -2x_1 + 3x_2$, $\rho x_3' = -2x_1 + 3x_3$. **154.** $O(1{:}\ 1{:}\ 1)$, $g(1{:}\ 1{:}\ 1)$. Указание. Найти неподвижные точки преобразования π (см. указание к задаче 130). **155.** $O(1{:}\ -1{:}\ -2)$, $g(1{:}\ -1{:}\ 1)$. Указание. Найти неподвижные точки и инвариантные прямые преобразования π (см. указание к задаче 130). **156.**

$$\rho x_1' = (\alpha + \sigma)x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3,$$

$$\rho x_2' = \beta x_1 + (\beta + \sigma)x_2 + \beta x_3,$$

$$\rho x_3' = \gamma x_1 + \gamma x_2 + (\gamma + \sigma)x_3, \text{ где}$$

$$\sigma(\alpha + \beta + \gamma + \sigma) \neq 0$$

и по меньшей мере одно из чисел α, β, γ отлично от нуля. Центр гомологии: $(\alpha{:}\ \beta{:}\ \gamma)$. Указание. Учесть что точки $(0{:}\ 1{:}\ -1)$ $(1{:}\ 0{:}\ -1)$ и $(1{:}\ -1{:}\ 0)$ являются неподвижными для рассматриваемых гомологий. **157.** $\frac{b}{a}$. **158.** $\rho x_1' = \alpha x_1$, $\rho x_2' = \alpha x_2$, $\rho x_3' = \beta x_3$, $\alpha\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$. **159.** $\rho x_1' = \alpha x_1 + \beta x_2$, $\rho x_2' = \alpha x_2$, $\rho x_3' = \alpha x_3$, $\alpha\beta \neq 0$. **160.** У обеих гомологий должны совпадать как центры, так и оси или же центр каждой из гомологий должен лежать на оси другой. Если обе гомологии σ и τ — параболические, второе из указанных условий влечет за собой либо совпадение их центров, либо совпадение осей. Указание. Рассмотреть три случая: 1) гомологии σ и τ имеют общие центр и ось (см. задачи 158 и 159); 2) оси σ и τ различны; 3) центры σ и τ различны. В случае 2) принять оси гомологий за координатные прямые; случай 3) является двойственным к случаю 2). **161.** Преобразование $\tau\sigma$ — гомология в следующих двух случаях (и только в этих случаях): 1) центры (или оси) гомологий σ и τ совпадают; 2) гомологии σ и τ — гиперболические с равными инвариантами I (см. задачу 138), центр O_1 гомологии σ лежит на оси h_2 гомологии τ, а центр O_2 гомологии τ расположен на оси h_1 гомологии σ. В случае 2) преобразование $\tau\sigma = \sigma\tau$ (см. задачу 160) есть также гиперболическая гомология с осью O_1O_2, с центром $O = h_1 \cap h_2$ и с инвариантом, равным $\frac{1}{I}$. Указание. В том случае, когда и центры и оси гомологий σ и τ различны, при аналитическом решении принять оси гомологий за координатные прямые и учесть следующее обстоятельство: коллинеация является гомологией тогда и только тогда, когда для одного из корней характеристического уравнения (см. указание к задаче 130) матрица определителя, стоящего в левой части этого уравнения, имеет ранг, равный 1. При синтетическом решении установить прежде всего, что двойные точки преобразования $\tau\sigma$, отличные от точки $O = h_1 \cap h_2$, должны лежать на прямой O_1O_2. **162.** $O(1{:}\ 1{:}\ 0)$; $g(1{:}\ 1{:}\ -1)$. **163.** Указание. Инвариант инволюционной гомологии равен -1 (см. задачи 138, 142); общую ось гомологий σ и τ принять за координатную прямую O_1O_2. **164.** $ax_2x_3 + bx_3x_1 + cx_1x_2 = 0$, где $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ и $a + b + c = 0$. **165.** $ax_1^2 + bx_2x_3 = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$. **166.** а) Пара действительных прямых; б) овальная линия второго порядка; в) пара совпадающих прямых; г) пара мнимых комплексно сопряженных прямых, пересекающихся в действительной точке $(1 : -1 : 2)$. **167.** а) $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ и $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$; б) $2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$ и $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0$; в) $x_1 - x_3 = 0$ и $2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$. **168.** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. **169.** (O_2O_3): $(0{:}\ 1{:}\ 1)$ и $(0{:}\ 1{:}\ -1)$; (O_1O_3): $(1{:}\ 0{:}\ 1)$ и $(1{:}\ 0{:}\ -1)$;

(O_1O_2): комплексно-сопряженные точки $(1 : i : 0)$ и $(1 : -i : 0)$; (O_1E): прямая касается линий в точке $(0 : 1 : 1)$; (O_2E): прямая касается линии в точке $(1 : 0 : 1)$; (O_3E): $(1 : 1 : \sqrt{2})$, $(1 : 1 : -\sqrt{2})$. **170.** а) $(1 : -1 : -3)$, $(1 : -2 : -5)$, б) прямая касается линии в точке $(1 : -2 : 0)$. **171.** Овальная линия второго порядка. Указание. Показать, что отображение $\bar{\pi}: [Q] \to [K]$, при котором прямая QX пучка $[Q]$ переходит в прямую RY пучка $[K]$, является проективным, но не перспективным. **172.** Указание. Воспользоваться геометрическим определением линий второго порядка. **173.** Овальная линия второго порядка, проходящая через точки A, B, C, D. Указание. Обозначив через M_0 фиксированную точку множества Ω, а через M — произвольную точку этого множества, ввести в рассмотрение точки пересечения прямых M_0A, M_0B, MA и MB с прямой CD и применить предложение задачи 52 и геометрическое определение линий второго порядка. Задачу можно решить также аналитически. При этом целесообразно ввести в рассмотрение систему координат $CDAB$. **174.** Указание. Рассматривая перспективное отображение $\sigma_1 : (l) \xrightarrow{C} (BD)$, показать, что $\alpha = (KDC'B)$, где $K = (A'C) \cap (BD)$. Поэтому $\alpha = (A'C,\ A'D,\ A'A,\ A'B)$, далее см. № 172. **175.** Указание. Основываясь на теоремах Штейнера, показать, что $(XY'P'P) = (X'YPP')$, где $X = (AD) \cap a$, $X' = (BC) \cap a$, $Y = (BD) \cap a$ и $Y' = (AC) \cap a$. **176.** Указание. Обозначим через V и V' вторые точки пересечения прямых UA и $U'A'$ соответственно с линией G, а через t_1, t_2, t_3, t_4 — касательные к G соответственно в точках U, V, U', V'. Пусть далее $P = t_1 \cap t_2$, $Q = t_3 \cap t_4$, $D_1, D_2 = (AP) \cap G$, а $E_1, E_2 = (A'Q) \cap G$. Коллинеация π_1 определяется условиями: $U' = \pi_1(U)$, $V' = \pi_1(V)$, $Q = \pi_1(P)$, $E_1 = \pi_1(D_1)$. Для коллинеации π_2 последнее условие заменяется на $E_2 = \pi_2(D_1)$. **177.** $\rho x_1' = \lambda^2 x_1 + \mu^2 x_2 + 2\lambda\mu x_3$, $\rho x_2' = \sigma^2 x_1 + \tau^2 x_2 + 2\sigma\tau x_3$, $\rho x_3' = \lambda\sigma x_1 + \mu\tau x_2 + (\lambda\tau + \mu\sigma) x_3$, где $\lambda\tau - \mu\sigma \neq 0$. **178.** Указание. а) См. задачу 57. **179.** Указание. а) См. задачу 58. **180.** Указание. а) Воспользоваться геометрическим определением линии G, приняв точки A и B за центры проективных пучков. **181.** Указание. а) Воспользоваться геометрическим определением линии G, приняв точки A и B за центры проективных пучков; б) применить предельные случаи теоремы Паскаля. **182.** Указание. а) Применить теорему Брианшона; б) применить предельный случай теоремы Брианшона. **186.** Указание. Применить теорему Паскаля к шестивершиннику $KLMNPQ$, где $K = BC \cap A'C'$, $L = BC \cap A'B'$, $M = AC \cap A'B'$, $N = AC \cap B'C'$, $P = AB \cap B'C'$, $Q = AB \cap A'C'$. **187.** Указание. Применить теорему Паскаля к шестивершиннику с тремя парами совпавших вершин (или теорему Брианшона к шестистороннику с тремя парами совпавших сторон). **188.** Указание. Сначала применить теорему Паскаля к шестивершиннику $ABCKLM$, а затем теорему Брианшона к шестистороннику со сторонами BC, CA, AB, LK, KM, ML. **189.** а) $2x_1 - 3x_2 = 0$; $3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$; $x_2 - x_3 = 0$; $x_1 = 0$; $7x_1 + 3x_2 - 12x_3 = 0$; б) $(1 : 3 : -2)$. **190.** $x_2 + x_3 = 0$; $6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0$. **191.** Указание. Если при коллинеации система координат $O_1O_2O_3E$ переходит в систему координат $O_1'O_2'O_3'E'$, то точка M в исходной системе имеет те же координаты, что и ее образ M' во второй системе. Возможно также синтетическое решение задачи. **192.** Указание. См. задачу 31. **193.** Указание. Сначала показать, что точка M_3 является полюсом прямой OM. **194.** Указание. Стороны шестивершинника Ω_1 являются полярами соответствующих вершин шестивершинника Ω_2. **195.** Указание. Инвариант инволюционной гомологии равен -1 (см. задачу 142). **196.** Линия второго порядка $3y_1^2 - 3y_2^2 - y_3^2 + 2y_1y_2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3 = 0$. Указание. Если точка $P(y_1 : y_2 : y_3)$ есть полюс относительно G_2 касательной к линии G_1 в ее точке $M(x_1 : x_2 : x_3)$, то $\rho(y_1 + y_2) = x_1 + x_3$, $\rho(y_1 + 2y_2) = -3x_2$, $\rho y_3 = x_1 - 5x_3$. Далее исключить x_1, x_2, x_3 из указанных уравнений и уравнения линии G_1. **197.** $(5 : 1 : 1)$. **198.** Указание. Принять прямые a и b за координатные и применить условие сопряженности (1), с. 31. **199.** Указание. См. задачу 198 и свойство взаимности полюсов и поляр. **200.** Указание. Принять вершины трехвершинника ABC за базисные точки системы координат и воспользоваться формулой (1) с. 31. **201.** $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 = 0$. **202.** Указание. Прямые AP', BQ', CR' суть поляры точек

P, Q. R относительно линии G. 203. Указание. Рассмотреть проективное отображение σ: $(AB) \to (DE)$, при котором M и $M' = \sigma(M)$ сопряжены относительно G (см. задачу 198). Пользуясь отображением σ, построить новое отображение $\overline{\pi}$: $[D] \to [A]$, при котором прямой DM соответствует прямая AM'. Далее воспользоваться тем, что отображение $\overline{\pi}$ является перспективным и что поляра точки C совпадает с осью этого отображения. Задачу можно решить также координатным методом, при этом целесообразно $ABDE$ принять за проективную систему координат. **204.** Указание. При решении задачи учесть, что точки $(AB') \cap (A'B')$ и $(AB') \cap (A'B)$ сопряжены относительно линии G (см. задачу 203). **205.** Указание. См. задачу 203; применить теорему Дезарга. **206.** Пучок $[A]$ прямых, где A — полюс прямой a; $a \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $A \in a$. **207.** Указание. Отображение σ: $(AC) \to (BC)$, при котором образ и прообраз сопряжены относительно линии G (см. задачу 198), является перспективным, так как $\sigma(C) = C$. Центр P этого перспективного отображения есть точка, в которой пересекаются касательные к G в точках A и B, т. е. полюс прямой AB. При аналитическом решении принять A, B, C за базисные точки системы координат. **208.** Линия второго порядка. Указание. См. задачу 198. **209.** Указание. При аналитическом решении принять точку P за точку O_1 системы координат $O_1O_2O_3E$, точки O_2, O_3 взять на прямой P, и притом так, чтобы $O_3 = \sigma(O_2)$. При синтетическом решении задачи ввести в рассмотрение точки $Q = p \cap (PM)$ и N, для которой $MN \overset{h}{-} PQ$, и проективное отображение $\overline{\pi}$: $[M] \to [N]$, при котором $\overline{\pi}(MA) = (NA')$, где $A' = \sigma(A)$. **210.** См. задачу 192. **211.** Указание. Пусть в системе координат $O_1O_2O_3E$ точка P имеет координаты $(p_1 : p_2 : p_3)$. Записать общий вид уравнения линии второго порядка, проходящей через точки O_1, O_2, O_3, и, воспользовавшись условием сопряженности точек P и E, показать, что все эти линии проходят через точку $\left(\frac{1}{p_2 + p_3}, \frac{1}{p_3 + p_1}, \frac{1}{p_1 + p_2}\right)$. **212.** Указание. Пусть u_1 и u_2 — две фиксированные произвольные касательные к линии G_1, а t — переменная касательная. По теореме, двойственной теореме Штейнера, отображение σ: $u_1 \to u_2$, при котором образом точки $t \cap u_1$ служит точка $t \cap u_2$, является проективным. Далее рассмотреть полюсы касательных u_1, u_2, t и поляры точек $t \cap u_1$, $t \cap u_2$ относительно G_2 и воспользоваться теоремой Штейнера. Возможно также аналитическое решение; см. указание к задаче 196. **213.** Указание. Применить предложение задачи 192 и двойственное к нему. **215.** Указание. Воспользоваться задачами 178 и 214. **216.** Указание. Сначала построить: а) поляру точки A; б) вспомогательную прямую g $(A \in g)$ и ее полюс. **217.** Указание. Построить поляры двух точек, лежащих на прямой l; см. задачу 214. **218.** Указание. Предварительно построить поляру точки M; см. задачу 214. **220.** См. задачу 207 и указание к ней. **221.** Указание. Задача двойственна задаче 220. **222.** Указание. Воспользовавшись задачами 68 и 73, построить точки пересечения поляры точки C с прямой AB. **224.** Неподвижны те и только те точки линии G, которые совпадают с точками пересечения линии G и прямой l. **225.** Указание. Рассмотреть пучок $[S]$ с центром в некоторой точке линии G и его образ $[S']$, где $S' = \pi(S)$. **226.** Указание. Применить соответствующее предложение для пучков прямых. **227.** Указание. Показать, что преобразование σ индуцировано инволюционной гомологией (см. задачу 142) с центром P и осью p, где p — поляра точки P. **228.** Указание. На линии G взять точки A и A' в качестве центров пучков, порождающих преобразование σ. **230.** Указание. Пусть A, A', B, B' и C, C' — три пары соответственных точек инволюции σ: $G \to G$. Применить теорему Дезарга к трехвершинникам ABC и $A'B'C'$ (см. задачу 228). **231.** Центром является точка P, осью — поляра p точки P, а неподвижными точками будут те и только те точки, которые принадлежат множеству $p \cap G$. **232.** Указание Точки A, C являются неподвижными точками, а B, D — соответствующими точками инволюции на кривой G с центром в точке N (см. задачу 230). **233.** Указание. Пусть A и B — две фиксированные точки линии G. $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$, $X = (AA') \cap (MM')$, $Y = (BB') \cap (MM')$. Опираясь на задачи 192, 198, 228 и на обратную теорему Штейнера, установить, что отображение τ: $(AA') \to (BB')$, при котором $\tau(X) = Y$,—

проективное. **234.** У к а з а н и е. Выбрать на линии G две различные точки O и O' и рассмотреть отображение $\overline{\pi}$: $[O] \to [O']$, которое порождает данное преобразование σ. **235.** У к а з а н и е. Искомые неподвижные точки — точки пересечения оси преобразования σ (см. задачу 228) с линией G. **236.** У к а з а н и е. Взять на G любую точку O и спроектировать из точки O на линию G точки прямой l. Если построение выполнено на расширенной евклидовой плоскости, то в качестве линии G удобно взять окружность. **237.** У к а з а н и е. Учесть, что точка B является неподвижной точкой проективного преобразования прямой b, являющегося произведением трех перспективных отображений с центрами в точках L, M, N; далее см. задачу 236. **238.** У к а з а н и е. Искомые точки являются неподвижными точками проективного преобразования прямой l, порождаемого в пересечении с l производящим линию G отображением пучков (см. задачу 236). **239.** У к а з а н и е. Построить поляру точки P (см. задачу 215) и применить построение задачи 238. **240.** У к а з а н и е. Рассмотреть перспективное отображение σ: $(AB) \xrightarrow{L} (CD)$, где $L = (BC) \cap h$. Далее рассмотреть отображение пучков $\overline{\pi}$: $[D] \to [A]$, при котором прямая DM переходит в прямую AM', где $M \in AB$, а $M' = \sigma(M) \in CD$; полученное отображение пучков определит линию второго порядка G_1. Искомая точка касания $X \subset h$ есть точка пересечения линии G_1 с прямой h. См. задачу 238. **241.** У к а з а н и е. Сначала построить центры P_1 и P_2 данных инволюций (см. задачу 230), а потом точки пересечения прямой P_1P_2 с линией G (см. задачу 238). **242.** У к а з а н и е. См. задачи 230, 241, 236 и указание к задаче 236. **243.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачами 242 и 214. **244.** У к а з а н и е. Одна из вершин трехвершинника будет неподвижной точкой проективного преобразования линии G, являющегося произведением трёх ее инволюций с центрами в точках L, M, N (см. задачу 237). **245.** У к а з а н и е. Точка A — неподвижная точка проективного преобразования линии G, являющегося произведением четырех ее инволюций с центрами в точках K, M, L и O. Далее см. построение задачи 235. **246.** У к а з а н и е. Задача двойственна задаче 244. **247.** У к а з а н и е. Задача двойственна задаче 245. **248.** У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой о том, что коллинеация определяется тремя парами соответственных точек и парой соответственных прямых. **249.** У к а з а н и е. См. задачу 248. **250.** У к а з а н и е. Воспользоваться свойствами разделенности точек. **252.** У к а з а н и е. б) См. задачи 248 и 251. **255.** У к а з а н и е. Применить теорему Дезарга. **256.** У к а з а н и е. См. задачи 248 и 254. **259.** У к а з а н и е. Инвариантные прямые гомологии — ее ось и прямые, проходящие через ее центр. **260.** У к а з а н и е. а) См. задачу 259. б) Соответствующие прямые гомологии пересекаются на оси. в) См. задачи 138 и 254. г) См. задачу 137. д) Сначала, пользуясь свойством инвариантных прямых гомологии, доказать, что данная гомология — аффинная; в случае, если эта гомология гиперболическая (центр не лежит на оси), использовать определение гомотетии, а в случае параболической гомологии (центр лежит на оси) использовать свойство прямых, соединяющих соответствующие точки гомологии, и свойство соответствующих прямых гомологии. е) Произведение $\overline{\gamma}_2\overline{\gamma}_1$ — либо гомотетия, либо параллельный перенос (см. задачу 260д); если $S_1 = S_2$, то и $S = S_1 = S_2$, если $S_1 \neq S_2$, то (S_1S_2) — инвариантная прямая гомотетий $\overline{\gamma}_1$ и $\overline{\gamma}_2$, поэтому (S_1S_2) — инвариантная прямая $\overline{\gamma_1\gamma_2}$ и, значит, $S \in (S_1S_2)$. Далее доказать, что если $k_1k_2 = 1$, то S — несобственная точка, если $k_1k_2 \neq 1$, то S — собственная. ж) Доказать, что произведение любых двух преобразований из множества Ω оставляет неподвижной каждую несобственную точку. **261.** У к а з а н и е. См. задачу 138. **262.** Парабола, если $l \parallel (BC)$; гипербола, если $l \nparallel (BC)$. У к а з а н и е. Рассмотреть отображение пучка $[C]$ на пучок $[B]$, при котором прямой CA соответствует прямая BD. **265.** Точка пересечения диаметра с параболой является серединой отрезка, определяемого данными полярно сопряженными точками. **266.** Точка пересечения прямой l с гиперболой является серединой отрезка, определяемого данными полярно сопряженными точками. **267.** Поляры точек, лежащих на асимптоте, параллельны этой асимптоте. **269.** Прямые, соединяющие полярно сопряженные точки прямых a и b, являются диаметрами. У к а з а н и е. См. задачу 220. **270.** У к а з а н и е. Применить теорему о взаимности полюсов и поляр. **271.** У к а з а н и е. Рассмотреть поляру несобственной точки касательной. **272.** У к а з а н и е. Рассмотреть точку $m \cap l$, где m — поляра несобственной точки прямой l. **273.** У к а з а н и е. Применить теорему, двойственную предложению задачи 209 (центр инволюции — центр линии второго порядка, инволюция задается данными двумя сопряженными диаметрами, а поляра центра инволюции — несобственная прямая). **274.** У к а з а н и е. Применить предложение Штаудта (задача 207) для описанного треугольника, образованного асимптотами и касательной в несобственной точке параллельных прямых. **275.** У к а з а н и е. Спроектировать из несобственной точки основания одну сторону на другую. **276.** У к а з а н и е. Если прямые AG и BE содержат медианы треугольника ABC и $(AG) \cap (BE) = H$, $(CH) \cap (AB) = L$, то в силу гармонических свойств четырехугольника $ECGH$ имеем: $LN \overset{h}{\text{—}} AB$, где $N = (EG) \cap (AB)$. Согласно предыдущей задаче, точка N является несобственной. **277.** У к а з а н и е. Применить гармонические свойства полных четырехугольников $BMCH$ и $AMDH$. **278.** У к а з а н и е. Применить гармонические свойства четырехугольника $CNOM$, учитывая, что $MN \parallel AB$. **279.** У к а з а н и е. Пользуясь задачей 278, показать, что рассматриваемые диагонали принадлежат медианам исходного треугольника. **280.** У к а з а н и е. Показать, что треугольники MBN и QDP удовлетворяют теореме Дезарга. **281.** У к а з а н и е. Показать, что треугольник, образованный прямыми, проходящими через вершины треугольника ABC, параллельно противоположным сторонам, и треугольник ABC удовлетворяют теореме Дезарга. **282.** У к а з а н и е. См. задачу 122 (одна из данных прямых p и q является несобственной, а другая совпадает с l). **283.** У к а з а н и е. Применить теорему Паскаля к вписанному шестивершиннику $AB'A'B_0A_0B$. **284.** У к а з а н и е. См. задачу 18. **285.** У к а з а н и е. Применить теорему Брианшона к шестистороннику $acbb'c'a'$. **286.** У к а з а н и е. См. задачу 40 а). **287.** Р е ш е н и е. Покажем, что точка X удовлетворяет условию: $AC \overset{h}{\text{—}} XB$, где C — середина отрезка AB. В самом деле, $(ACBX) = -1 \Rightarrow (ABCX) = 2 \Rightarrow \frac{(ABC)}{(ABX)} = 2 \Rightarrow (ABX) = \frac{1}{2}$. Далее см. задачу 35. **288.** У к а з а н и е. Из условия задачи следует, что $(ABX) = \frac{1}{n-1}$. Если C — середина отрезка AB, то $(ABC) = 1$, поэтому $(ABCX) = \frac{(ABC)}{(ABX)} = n - 1$. Далее см. задачу 38. **289.** У к а з а н и е. Построить полный четырехвершинник, для которого точки A, B диагональные, P — вершина, а одна из сторон проходит через точку C (противоположная сторона — искомая). **290.** У к а з а н и е. Применить обратную теорему Дезарга. См. также задачи 286 и 289. **291.** У к а з а н и е. Построить вспомогательную прямую d, отличную от данных и параллельную им (см. задачу 290). Далее построить точку X так, чтобы $AX \overset{h}{\text{—}} BD_\infty$, где D_∞ — несобственная точка прямой d. **292.** Сначала построить прямые u, v, параллельные (AB) (задача 289), причем $u \neq v$, $u \neq (AB)$, $v \neq (AB)$. Пусть S — произвольная точка прямой u. Далее построить последовательно: $A_1 = (AS) \cap v$, $B_1 = (BS) \cap v$, $T = (MA_1) \cap u$, $N = (B_1T) \cap u$. Отрезок MN — искомый. У к а з а н и е. Для обоснования построения рассмотреть две гомотетии: σ_1 — с центром в точке S, при которой $A_1 = \sigma_1(A)$, и σ_2 — с центром в точке T, при которой $M = \sigma_2(A_1)$. Доказать, что произведение $\sigma_2\sigma_1$ есть параллельный перенос (см. задачу 260, д), при котором отрезок AB переходит в $[MN]$. **293.** а) Пусть стороны параллелограмма лежат на прямых a, a', b, b', причем $a \parallel a'$ и $b \parallel b'$. Введем обозначения: $C = a \cap b$, $C' = a' \cap b'$, $A = b \cap c$, $B = a \cap c$. Построим точки $S = (PA) \cap (CC')$ и $B' = (SB) \cap a'$. Прямая $B'P$ — искомая. У к а з а н и е. Для обоснования построения применить обратную теорему Дезарга к треугольникам ABC и $PB'C'$. б) У к а з а н и е. Пользуясь задачей 290, свести этот случай к предыдущему. **294.** У к а з а н и е. Пользуясь задачей 289, свести данную задачу к задаче 293, а. **295.** У к а з а н и е. Задача решается аналогично задаче 290. Применить обратную теорему Дезарга. **296.** Р е ш е н и е. Достаточно построить две точки X и Y, принадлежащие прямой AB и отличные от A и B. Пусть $R = a \cap b$, $R' = a' \cap b'$. Возьмем точку O на прямой RR', отличную от R и R', и через эту точку проведем две прямые p и q, отличные от (RR'). Пусть $P = p \cap a$, $P' = p \cap a'$, $Q = q \cap b$, $Q' = q \cap b'$. Треугольники PQR и $P'Q'R'$ удовлетворяют теореме Дезарга, поэтому точка $X = (PQ) \cap (P'Q')$ лежит на прямой AB. Точка Y строится аналогично. **297.** У к а з а н и е. См. задачу 296. **298.** У к а з а н и е. Пусть $a \cap b = C$, $a \cap c = B$, $b \cap c = A$, $a' \cap b' = C'$. На прямой CC' возьмем произвольную точку S, пусть $(SB) \cap a' = B'$, $(SA) \cap b' = A'$. Применив к треугольникам ABC и $A'B'C'$ теорему Дезарга, доказать, что

$A'B'$ — искомая прямая. **299.** Указание. Если $[AB]$ — данный отрезок плоскости P_2, а C_∞ — точка пересечения прямой AB с абсолютом, то построить X так, чтобы $AB \overset{h}{=} XC_\infty$. **300.** а) Последовательно построить: l_1 $(A \in l_1,\quad C \in l_1)$ и l_2 $(B \in l_2,\quad l_2 \parallel l_1)$. $X = l_2 \cap b$. б) Указание. Построить вспомогательную прямую l $(l \parallel a,\ l \neq a)$. Затем дважды применить построение а). **301.** Указание. См. задачу 299. **302.** Указание. $(BD) \overset{h}{=} (CK_\infty)$, где $K_\infty = (BO) \cap p^*$; $C = (AO) \cap BL_\infty$, где $L_\infty = AD \cap p^*$. **320.** Указание. а) См. задачу 299; б) построить центр линии. **321.** Указание. Построить поляру несобственной точки данной прямой (задача 214). **322.** Указание. Построить поляру точки P и через P провести прямую, параллельную этой поляре. **323.** Указание. Построить поляру несобственной точки прямой l, найти точки пересечения ее с данной линией и провести через эти точки прямые, параллельные прямой l. **324.** Указание. Построить поляру несобственной точки прямой l и провести касательные, ей параллельные (задача 323). **325.** Указание. Сопряженные направления гармонически разделяют асимптотические направления. Провести через некоторую точку данной асимптоты прямую, параллельную второй асимптоте. Далее см. задачу 310. **326.** Указание. Задача сводится к задаче 220 в предположении, что точка пересечения прямых — несобственная, а точка M — центр. **327.** Указание. Задача сводится к задаче 220. **328.** Указание. Задача сводится к задаче 221. **329.** Указание. Задача сводится к задаче 221. **330.** Указание. Искомая прямая параллельна прямой a и проходит через полюс B прямой b. **331.** Решение. Пусть прямые a, b пересекают прямую AB в точках A', B'. Пары точек A, A' и B, B' определяют инволюцию полярно сопряженных точек на прямой AB. По второй теореме Дезарга построим точку C', соответствующую в этой инволюции несобственной точке C прямой AB. Прямая $C'S$ $(S = a \cap b)$ — искомая. **332.** Указание. Построить вторую асимптоту как четвертую гармоническую к первой относительно данной пары сопряженных диаметров. Затем построить четвертую гармоническую прямую к данному диаметру относительно асимптот. **333.** Указание. Воспользоваться второй теоремой Дезарга. **334.** Указание. Задача сводится к отысканию двойных прямых инволюции в пучке. **335.** Указание. Доказать, что параллельный перенос и гомотетия индуцируют на прямой p^ω тождественное преобразование. **337.** Решение. Соответствующая отражению аффинная инволюционная гомология π на несобственной прямой индуцирует инволюцию ω' с неподвижными точками S, S_∞. ω — эллиптическая инволюция. Значит, инволюции ω и ω' имеют общую сопряженную пару точек L, $\overline{L}$. Инволюция ω' переводит абсолютную инволюцию ω в инволюцию $\overline{\omega} = \omega'\omega\omega'$. $\overline{\omega}^1$ и ω имеют две общие сопряженные пары точек (S, S_∞) и $(L, \overline{L})$ и поэтому совпадают. Таким образом, аффинная гомология π сохраняет абсолютную инволюцию. **338.** Если $l \pm (AB)$, то G — овальная линия второго порядка. Если $l \parallel (AB)$, то G — парабола; если $l \pm (AB)$ и $l \nparallel (AB)$, то G — гипербола. Если $l \perp (AB)$, то G — прямая. Указание. Рассмотреть преобразования σ_1: $[A] \to [B]$, при котором прямая AC переходит в прямую BC, и σ_2: $[B] \to [A]$, при котором прямая BH, перпендикулярная прямой AC, переходит в прямую AH, перпендикулярную прямой BC. σ_1 — перспективное отображение, а σ_2 — проективное. **339.** Указание. Задача решается аналогично задаче 338. **341.** Указание. Рассмотреть гомотетию с центром в вершине угла и отрицательным коэффициентом. **343.** Указание. а) См. задачу 34. **344.** Указание. См. задачу 343. **348.** Указание. а) При эллиптической инволюции соответствующие пары разделяют друг друга: $aa_1 \div bb_1$; согласно задаче 342 $ab \doteq a_1b_1$, т. е. $(aba_1b_1) > 0$. **350.** Указание. Прямой угол переходит в прямой угол. **351.** Указание. Рассмотреть проективные отображения прямых пучка $[S]$ и точек несобственной прямой p^ω, индуцируемые исходным подобным преобразованием. **352.** Указание. Доказать, что σ сохраняет сложное отношение четырех прямых. **353.** Линия второго порядка. Указание. Отображение σ: $[O] \to [O']$, при котором прямая OM переходит в прямую $O'M$, является перспективным (см. задачу 352). Показать, что отображение $a \to a'$ является проективным. **354.** Линия второго порядка. Указание. Задача решается аналогично предыдущей. **355.** Множество всех касательных к параболе, касающейся прямой l. Указание. Рассмотреть отображение σ: $(l) \to (p^\omega)$, при котором точке $M = a \cap l$ ставится в соответствие точка $N = a' \cap p^\omega$, и показать, что σ — проективное преобразование (см. задачу 352). Отсюда вытекает, что прямые MN образуют пучок второго порядка, содержащий прямые l и p^ω. **356.** Указание. Отображение σ: $u \to u'$, при котором A переходит в A', является проективным. **357.** Указание. Рассмотреть гиперболическую инволюцию σ: $[O] \to [O]$, при которой прямые a и b неподвижны. Далее следует рассмотреть общую сопряженную пару инволюции $\bar{\sigma}$ и ортогональной инволюции пучка $[O]$. **360.** Указание. При отражении от прямой a стороны угла переходят друг в друга. **362.** Указание. См. задачу 357. **363.** Указание. Задача решается аналогично задаче 362. **364.** Указание. а) Рассмотреть две инволюции в пучке прямых с вершиной в центре линии второго порядка: инволюцию сопряженных прямых и ортогональную инволюцию; б) рассмотреть инволюцию сопряженных диаметров и применить задачу 361. **365.** Указание. См. задачу 264 и определение главной оси. **366.** Указание. а) Пара прямых a и b — общая сопряженная пара двух инволюций: инволюции полярно сопряженных прямых в пучке $[M]$ и ортогональной инволюции. б) См. задачу 361. **367.** Указание. а) Инволюция полярно сопряженных точек в данном случае является эллиптической; б) применить а); в) применить б). **368.** Указание. а) См. задачу 209; б) см. задачу 253. **370.** Указание. Рассмотреть инволюцию сопряженных диаметров (см. задачу 369). **371.** Указание. См. задачу 370. **372.** Указание. См. задачу 371. **373.** Указание. См. задачу 370. **374.** Указание. См. задачу 373. **375.** Решение. Если A и B — диаметрально противоположные точки окружности, то данная окружность — множество точек пересечений соответственных прямых a и a' отображения $\bar{\sigma}$: $[A] \to [B]$, где прямые a и a' проходят через соответственные точки абсолютной инволюции. Рассмотрим случай, когда A и B — не диаметрально противоположные точки окружности. Пусть A' и B' — точки, диаметрально противоположные соответственно точкам A и B. Очевидно, A, B, A' и B' — различные точки. Согласно задаче 348 имеем: $\cos^2 \varphi = (MA, MB, MB', MA')$. Согласно задаче 172 $\cos^2 \varphi$ не зависит от положения точки M. **376.** Указание. Рассмотрим окружность, построенную на стороне KL треугольника KLP как на диаметре (задача 368, б). В силу предыдущей задачи она пройдет через основания A и B перпендикуляров, опущенных из вершин L и K на другие стороны KP и LP треугольника KPL. Пусть $(AL) \cap (BK) = H$, $(AB) \cap (KL) = N$. В силу гармонических свойств полного четырехугольника $ABPH$ поляра точки N—прямая PH. Потому $(PH) \perp (KL)$ (задача 371). **377.** Указание. При любой коллинеации сохраняется полярное соответствие, при параллельных переносах сохраняется абсолют (задача 335, в). **378.** Указание. а) Рассмотреть параллельный перенос, определяемый отрезком OC, и воспользоваться предыдущей задачей. **379.** Указание. См. определение преобразования подобия. **380.** Указание. См. задачу 258. **381.** Указание. Окружности, построенные на отрезках AA' и BB' как на диаметрах, пересекаются, так как $AA' \div BB'$. Рассмотрим инволюцию прямых $\bar{\sigma}$: $[S] \to [S]$, при которой соответствующие прямые пересекаются с l в сопряженных точках инволюции σ. Инволюция $\bar{\sigma}$ ортогональна: $\bar{\sigma}$ имеет с ортогональной инволюцией пучка $[S]$ две общие пары прямых — (SA), (SA') и (SB), (SB'). Поэтому точка C лежит на перпендикуляре, опущенном из S на прямую l. Рассуждая аналогично о второй точке пересечения окружностей S', получим, что точки S, S' лежат на одном перпендикуляре к l, проходящем через точку C. **382.** Указание. На двух отрезках, определяемых соответствующими точками эллиптической инволюции ω_1 прямой p^{ω_1}, построить как на диаметрах две окружности α и β относительно абсолюта q^{ω_2}. Пусть S и S' — точки пересечения окружностей α и β. Далее показать, что существуют гомологии с центрами в точках S и S', при которых p^{ω_1} переходит в q^{ω_2}. **383.** Указание. Рассмотреть гомологию с центром в точке Лагерра; см. также определение величины угла (задача 349). **384.** Указание. Пусть Ω — множество всех касательных данной окружности, т. е. проективный пучок второго порядка. В множестве Ω рассмотреть преобразование, при котором прямой XZ отвечает прямая YZ. Пользуясь тем, что отображение σ: $(l) \to (l)$, при котором $Y = \sigma(X)$, является проективным, показать, что множество точек пересечения прямых XZ и YZ — линия второго порядка (см. задачу 233). **385.** Пучок прямых второго порядка. Указание. Учесть, что отображение $\sigma (\alpha) \to (\alpha)$, при котором $M' = \sigma (M)$, является проективным. **386.** Указание. а) См. определение расстояния. б) См. задачу 335, в. **387.** Указание. Пусть $M_1 \in \alpha$ и $M_2 \in \alpha$. Если точки M_1 и M_2 не являются диаметрально противоположными, то, обозначив $(OM_1) = l$, $(OM_2) = m$, воспользоваться задачей 210. Если M_1 и M_2 — диаметрально противоположные точки и $Z \notin (M_1M_2)$, то согласно предыдущему $|OM_1| = |OL|$, $|OM_2| = |OL|$, поэтому $|OM_1| = |OM_2|$. **388.** Указание. Пусть α — окружность с центром в точке A, проходящая через точку B, а B' — точка, диаметрально противоположная точке B. Согласно задаче 387 имеем: $|AB| = |AB'|$. Далее рассмотреть параллельный перенос, переводящий A в B, и воспользоваться задачей 386, б. **389.** Указание. Пусть O — центр окружностей α_1 и α_2, а h — луч с началом O. Если $h \cap \alpha_1 = M_1$, $h \cap \alpha_2 = M_2$, то сначала показать, что $M_1 = M_2$; далее см. задачу 368, а. **390.** Указание. Коллинеация сохраняет сложное отношение соответственных точек. Далее см. задачи 386, б и 387. **391.** Указание. См. задачи 380 и 390. **392.** Указание. а) При аффинных коллинеациях центр линии второго порядка переходит в центр. б) Предварительно показать, что если r_1 и r_2 — радиусы концентрических окружностей с центром в точке A, B_1 и B_2 — точки пересечения луча h с началом A с данными окружностями, то $(B_1B_2AN_\infty) = \frac{r_1}{r_2}$. Для этого рассмотреть точку $E = h \cap \varepsilon_A$ и воспользоваться задачей 28. **393.** Указание. Пусть r — радиус образа любой единичной окружности при преобразовании π (см. задачу 391). Показать, что если $A' = \pi (A)$, $B' = \pi (B)$, то $|A'B'| = r|AB|$. Для этого рассмотреть две окружности с центром в точке A: ε_A — единичную окружность и $\varkappa_A$ — окружность, проходящую через точку B. Образы этих окружностей ε'_A, и $\varkappa'_A$, — концентрические (задача 392, а). Окружности ε_A, $\varkappa_A$, ε'_A, $\varkappa'_A$, имеют радиусы 1, $|AB|$, r и $|A'B'|$ соответственно. Согласно задаче 392, б имеем: $\frac{|AB|}{1} = \frac{|A'B'|}{r}$. **394.** Указание. а) Сначала доказать, что соответствие полярно сопряженных прямых, проходящих через две собственные соответствующие точки M и M', совпадает с соответствием ортогональных прямых. б) Сначала доказать, что σ — проективное преобразование (рассмотреть пучки прямых, проектирующие соответствующие точки оси из несобственных точек прямых l и l'), затем доказать, что σ — инволюция. **395.** Указание. Доказать, что диаметр, проходящий через точку F, является осью; далее см. задачу 394 и определение фокуса. **397.** Указание. а) Доказать, что если линия второго порядка является эллипсом или гиперболой, то фокальная инволюция на одной из осей (основной) — гиперболическая, а на другой (побочной) — эллиптическая. б) Доказать, что фокальная инволюция — гиперболическая, но одна из ее двойных точек — несобственная. **398.** Указание. Воспользоваться теоремой о взаимности полюсов и поляр. **399.** Указание. В силу задачи, двойственной к задаче 207 для треугольника MND, описанного около линии второго порядка $\overline{\Gamma}$, где $D = t_A \cap t_B$, прямые FM и FN полярно сопряжены, поэтому они ортогональны. **400.** Указание. По теореме о взаимности полюс прямой FP — точка H пересечения прямой AB с директрисой f, соответствующей фокусу F. Прямые FP и FH полярно сопряжены, а значит, по определению фокуса ортогональны. С другой стороны, по основному свойству поляры $HK \overset{h}{-} AB$, где $K = (AB) \cap (FP)$, и, значит, FH, $FP \overset{h}{-} FA$, FB, а поэтому (задача 361) прямые FP и FH являются биссекторами прямых FA и FB. **401.** Указание. Всякая прямая, проходящая через точку M, полярно сопряжена касательной t_M, поэтому прямые t_M и MA ($(MA) \perp t_M$) пересекают основную ось в соответствующих точках A и B фокальной инволюции (задача 394), для которой двойными точками являются фокусы F_1, F_2. Значит, $AB \overset{h}{-} F_1F_2$, поэтому MA, $t_M \overset{h}{-} MF_1$, MF_2; далее применить задачу 361. **402.** Указание. а) Прямые q_1 и q_2 высекают на основной оси u соответствующие точки фокальной инволюции, и, значит, $q_1q_2 \overset{h}{-} PF_1$, PF_2. См. также определение биссектора двух прямых (задача 357); б) применить а), задачу 366 и рассмотреть отражение относительно q_1 (или q_2). **403.** Решение. При преобразовании π окружность α_1 переходит в пучок второго порядка, огибающий кривую второго порядка Γ (задача 212). Полярное соответствие π_1 относительно окружности α_1 перейдет в полярное соответствие $\pi' = \pi\pi_1\pi$ относительно линии Γ. Полярно сопряженные точки относительно α_1 перейдут в полярно сопряженные прямые относительно Γ, и наоборот: полярно сопряженные прямые относительно α_1 перейдут в полярно сопряженные точки относительно Γ. Рассмотрим инволюцию полярно сопряженных точек относительно окружности α_1 на несобственной прямой — она совпадает по определению с абсолютной. При преобразовании π несобственная прямая p^* перейдет в центр O, полярно сопряженные точки перейдут в соответствующие прямые инволюции полярно сопряженных прямых относительно Γ и проходящих через точку O. Поскольку инволюция полярно сопряженных точек на несобственной прямой относительно α совпадает с той же инволюцией относительно окружности α_1 (обе совпадают с абсолютной инволюцией), то полярно сопряженные прямые относительно Г, проходящие через точку O, будут также перпендикулярны, т. е. точка O — фокус кривой Г. Точка O_1 — полюс несобственной прямой p^* относительно окружности α_1 при соответствии π перейдет в поляру o_1 точки O_1 относительно окружности α, она будет полярой точки O относительно Г, т. е. директрисой кривой Г. Поскольку (OO_1) проходит через фокус O и перпендикулярна директрисе o_1, (OO_1)—ось линии Г. **404.** Указание. Учесть, что $FQ \overset{h}{\perp} AB^*$, где B^*—несобственная точка оси, и определение середины отрезка (задача 253). **405.** Указание. См. задачу 401 (один фокус несобственной). **406.** Указание. См. задачу 402. **407.** Указание. Через точки A, B и $P = t_A \cap t_B$ соответственно проведем диаметры (AF_2^*), (BF_2^*), (PF_2^*), где F_2^* — несобственный фокус параболы. Через точку P проведем прямую CD, параллельную (AB). Пусть $\overset{\times}{P}A\overset{\times}{Q}$, $P\overset{\times}{B}R$, тогда в силу предыдущей задачи $\angle QAF_2^* \cong \angle PAF_1$, $\angle RBF_2^* \cong \angle PBF_1$. С другой стороны, в силу задачи 347 $\angle QAF_2^* \cong \angle APF_2^*$, $\angle RBF_2^* \cong \angle BPF_2^*$ и $\angle PAF_1 \cong \angle APC$, $\angle PBF_1 \cong \angle BPD$. Сравнивая (задача 340), получим: $\angle APC \cong \angle APF_2^*$, $\angle BPD \cong \angle BPF_2^*$, т. е. PA и PB — биссекторы прямых PC и PF_2^*. **408.** Указание. Проведем через точку $P = t_A \cap t_B$ диаметр PF_2^* и прямую CD, параллельную (AB). В силу теоремы взаимности они полярно сопряжены, значит, PF_2^*, $CD \overset{h}{\perp} PA$, PB, тогда в силу задачи 361 из перпендикулярности PA и PB следует, что PA и PB являются биссекторами прямых CD и PF_2^*. Провести рассуждения, обратные к рассуждениям, проведенным при решении предыдущей задачи. **409.** Указание. Применить предыдущую задачу и теорему о взаимности. **410.** Касательная к параболе $\tilde{\Gamma}$ в ее вершине. Указание. См. задачу 399. **411.** Касательная a к параболе $\tilde{\Gamma}$ в точке A такая, что $\angle ANF \cong (h_0 l_0)$, где F — фокус, $N = a \cap u$, а u — ось. Указание. См. задачу 402. **412.** Решение. Пусть $E = t_1 \cap n_1$, $D = n_1 \cap f$, A — вершина, a — касательная к параболе в ней, $Q = (AF) \cap f$. В силу задачи 410 $E \subset a$, в силу задачи 404 точка A является серединой $[QF]$; в силу задач 398 и 365 прямые f и a перпендикулярны к оси AF, потому $f \parallel a$. Тогда в силу задачи 275 прямая a — средняя линия треугольника DQF, т. е. точка E — середина отрезка DF и, значит, касательная t_1, перпендикулярная к DF, проходит через середину E отрезка DF. Также если $V = t_2 \cap n_2$, $N = n_2 \cap f$, то касательная t_2 проходит через середину V отрезка FN и перпендикулярна ему, а потому в силу задач 373, 374 точка $K = n_1 \cap n_2$ является центром окружности, описанной около треугольника FDN. **413.** Решение. Пусть треугольник ABC описан около параболы. Рассмотрим вторые касательные a_1, b_1, проведенные к параболе из точек L, M пересечения касательных $a = (BC)$ и $b = (AC)$ с директрисой: $L = f \cap b$, $M = f \cap a$. В силу задачи 409 $a_1 \perp a$, $b_1 \perp b$. Тогда в силу теоремы Брианшона для шестисторонника, описанного около кривой, образованного касательными a_1, a, $c = (AB)$, b, b_1, p^ω прямые, соединяющие противоположные вершины, проходят через одну точку, т. е. точка пересечения высот $h_A \cap h_B$ из вершин A и B принадлежит директрисе LM. **414.** У к а з а н и е. При любой коллинеации полюс прямой относительно линии второго порядка переходит в полюс соответствующей прямой относительно образа данной линии. **415.** У к а з а н и е. В силу задачи 191 инволюция полярно сопряженных точек несобственной прямой p^{ω} относительно окружности α перейдет в инволюцию полярно сопряженных точек несобственной прямой p^{ω} относительно соответствующей окружности α', т. е. будет сохраняться абсолют p^{ω}. **416.** У к а з а н и е. Ортогональное преобразование есть преобразование подобия. См. также задачи 392 и 393. **417.** У к а з а н и е. Рассмотреть окружность α, концентрическую к инвариантной окружности ε и конгруэнтную исходной α_0 (задача 378, а). При ортогональном преобразовании, как и при всяком преобразовании подобия (задача 415), α и α_0 перейдут в конгруэнтные окружности α' и α_0' (задача 380). В силу задачи 378 б) окружности α_0 и α_0' конгруэнтны. **418.** У к а з а н и е. Рассмотрим некоторую окружность α с центром на оси отражения. Так как диаметр окружности является осью ее симметрии (задача 379), то при отражении окружность α инвариантна. **419.** У к а з а н и е. а) См. задачу 378; б) см. задачу 415; в) см. задачи 418 и 419 б). **420.** У к а з а н и е. Пусть движение δ переводит окружность α_1 в окружность α_2. Поскольку эти окружности конгруэнтны, то (задача 378) существует параллельный перенос τ, также переводящий окружность α_1 в α_2. Тогда произведение $\varkappa = \tau^{-1}\delta$ — ортогональное преобразование. Отсюда следует, что $\delta = \tau\varkappa$. **421.** У к а з а н и е. Использовать последовательно задачи 420, 417 и 378. **422.** У к а з а н и е. Использовать последовательно задачи 420, 415 и 335 а). **423.** У к а з а н и е. Использовать последовательно задачи 422, 390 и 393. **424.** У к а з а н и е. Доказать, пользуясь задачами 387 и 191 а), что любая окружность α и ее центр O перейдет при этой коллинеации в окружность α' того же радиуса и ее центр O', затем в силу задач 191 б), в) показать последовательно, что эта коллинеация является аффинной и подобным преобразованием, воспользоваться задачей 378 и определением движения. **425.** Если A_∞ — несобственная точка прямой a, A_∞' — точка, соответствующая A_∞ при абсолютной инволюции ω, то: а) $x = (AA_\infty)$; б) $x = (AA_\infty')$. **426.** У к а з а н и е. Если $M \notin (AB)$, то строим точки $L_\infty = (AB) \cap p^{\omega}$ и $K_\infty = (AM) \cap p^{\omega}$. Точка $X = (K_\infty B) \cap (ML_\infty)$ — искомая. Если $M \in (AB)$, то, взяв точку N, ($N \notin (AB)$), свести задачу к повторному выполнению построения для первого случая. **427.** У к а з а н и е. Построить диаметр AB окружности, параллельный радиусу r (см. задачу 426). Далее см. задачу 375. **428.** У к а з а н и е. Построить прямую m ($O \in m$), $m \perp l$ (задача 425, б). Пусть $K = l \cap m$. Если $K \neq A$, то построить X так, что K — середина отрезка AX. **429.** У к а з а н и е. Если $a' \perp a$, то согласно задаче 357 имеем: $x, b \overset{h}{-} a, a'$. **430.** У к а з а н и е. Если прямая a параллельна какой-либо стороне угла (h, k), то задача сводится к задаче 425. Пусть $h \nparallel a$ и $H = h \cap a$. Не нарушая общности, можно предположить, что точки A, H и вершина O угла (h, k) не коллинеарны. Пользуясь задачей 373, строим центр C окружности α, проходящей через точки A, H и O. Пользуясь задачей 428, строим далее точку K пересечения прямой k с окружностью α, отличную от O. Прямая AK — искомая (см. задачу 375). **431.** У к а з а н и е. Построить ось, затем применить теорему Паскаля для вписанного четырехугольника. **432.** У к а з а н и е. Рассмотреть два случая. а) Линия Γ — центральная. Сначала построить центр линии Γ, как полюс несобственной прямой p^{ω}. Далее построить пару сопряженных диаметров, как полярно сопряженных прямых, проходящих через центр линии, и найти общую сопряженную пару двух инволюций — инволюции сопряженных диаметров и ортогональной инволюции. б) Линия Γ касается прямой p^{ω} в точке A_∞. Если A_∞^* — точка, сопряженная A_∞ в абсолютной инволюции, то провести через нее прямую, пересекающую линию Γ в двух точках M_1 и M_2. Если M — точка, удовлетворяющая условию $MA_\infty^* \overset{h}{-} M_1M_2$, то прямая MA_∞ — искомая. **433.** У к а з а н и е. Сначала, пользуясь задачей 432, построить оси данной линии. Согласно задаче 397 фокусы лежат на осях. Поэтому в силу задачи 399 фокусами линии будут точки пересечения оси с окружностью, построенной на отрезке любой касательной между двумя

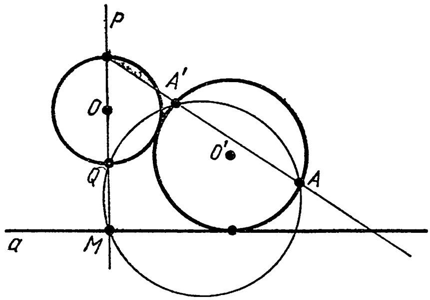


Рис. 14

касательными t_1 и t_2. Если линия центральная, то касательные t_1 и t_2 удобнее взять в концах соответствующей оси. Для построения точек пересечения окружности с прямой воспользоваться задачей 238. Директрису можно построить как поляру фокуса. **434.** Указание. Построив два диаметра окружности Ω^*, задачу свести к задаче 293. **435.** Указание. Построить полюс прямой l и, пользуясь задачей 371, свести данную задачу к предыдущей. **436.** Указание. Сначала построить диагонали квадрата K^* и через их точку пересечения O провести прямые, параллельные сторонам квадрата (задача 290). Эти четыре прямые образуют соответственные пары ортогональной инволюции σ пучка $[O]$. Построив прямую l_1 так, чтобы $O \in l_1$, $l_1 \parallel l$ (задача 293), построить образ прямой l_1 при инволюции σ, пользуясь теоремой Паппа-Дезарга (задача 68). **437.** Указание. См. указание к задаче 426. В случае а) см. задачу 434; в случае б) — задачу 293. **438.** Указание. См. указание к задаче 427. Для построения ортогональных прямых в случае а) воспользоваться задачей 435, в случае б) — задачей 436. **439.** Указание. Пользуясь задачей 438 а), построить несколько точек окружности α и тем самым свести задачу к задаче 238. **440.** Указание. Построить пересечение линии центров O_1O_2 с заданными окружностями: $(O_1O_2) \cap \alpha_1 = \{M, M'\}$, $(O_1O_2) \cap \alpha_2 = \{N, N'\}$, (задача 439). При помощи теоремы Паппа-Дезарга построить центр C инволюции, в которой точки M, M' и N, N' являются соответствующими. В силу задачи 381 перпендикуляр через C к (O_1O_2) — радикальная ось указанных окружностей. Найти точки пересечения ее с одной из этих окружностей (задача 439). **441.** Указание. Построить общую сопряженную пару двух инволюций: ортогональной и гиперболической, двойными прямыми которой являются стороны угла. **443.** Указание. Построить прямые a и b, проходящие соответственно через концы A и B отрезка AB и перпендикулярные прямой AB. Далее, пользуясь задачей 441, построить биссекторы прямых a и AB. **444.** Указание. Учесть, что при решении задач на построение циркулем и линейкой роль циркуля сводится к построениям, описанным в задачах 427, 439, 440. **448.** Указание. Общая касательная к искомым окружностям, проходящая через C, либо параллельна (AB), либо проходит через середину $[AB]$. **449.** Указание. Рассмотреть прямую, проходящую через центр данной окружности и середину отрезка, соединяющего данные точки. **456.** Указание. Предварительно показать, что если O — центр данной окружности, то прямая B_1O параллельна прямой BH и делит основание AC треугольника пополам. **460.** Указание. Построить треугольник OBC. **463.** Указание. Пусть (O_1, r_1) и (O_2, r_2) — данные окружности, $A \in (O_1, r_1)$. Построить радиус O_2B, параллельный (O_1A). Точка касания искомой окружности с окружностью (O_2, r_2) лежит на (AB). **465.** Указание. Биссектрисы треугольника ABC лежат на прямых, содержащих высоты искомого треугольника. **466.** Указание. Середина искомой хорды XY принадлежит окружности, построенной на отрезке OP как на диаметре. **470.** Указание. Из искомой точки отрезок O_1O_2 виден под углом $2d - \frac{\varphi}{2}$ или $\frac{\varphi}{2}$. **474.** Указание. См. задачу 449. **477.** Указание. Использовать множество середин хорд, определяемых углом φ. **480.** Указание. Если M—точка пересечения искомых секущих и данный угол не конгруэнтен углу AOB, то $[MO)$ — биссектриса угла AMB. **483.** Указание. Найти множество точек, делящих хорды, конгруэнтные данному отрезку, в данном отношении. **484.** Указание. Центр искомой окружности принадлежит множеству точек, сумма квадратов расстояний от которых до точек O и A постоянна. **485.** Указание. Разность квадратов расстояний от O до центров любых двух данных окружностей постоянна. **486.** Указание. Центр искомой окружности принадлежит множеству всех точек, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек есть величина постоянная. **488.** Указание. Диагональ квадрата проходит через середины дуг AB и CD окружностей, построенных на $[AB]$ и $[CD]$ как на диаметрах. **489.** Указание. Найти множество точек, отношение расстояний от которых до данных прямых постоянно. **496.** Указание. Рассмотреть среднюю линию $\triangle ABC$, параллельную (AC). **497.** Указание. Рассмотреть множество середин всех хорд описанной окружности, проходящих через вершину C. **498.** Указание. Учесть, что $\widehat{BOC} = d + \frac{\widehat{A}}{2}$, где O — центр вписанной окружности. **499.** Указание. По углу A и R построить сторону BC. **513.** Указание. $|c|:|b| = |m|:|n|$. **519.** Указание. Пусть $ABCD$ — искомый четырехугольник, сторона AD которого не задана. Рассмотрим параллельный перенос $(\vec{A} \to D)$ и обозначим B' образ точки B. Сначала построить треугольник CDB'. **529.** Указание. Перенести отрезок BF на вектор $\overline{FE}$. **530.** Указание. Окружность (O_2, r_2) перенести параллельно так, чтобы ее хорда совпала с конгруэнтной ей хордой окружности (O_1, r_1). Тогда центр перенесенной окружности (O_2', r_2) есть точка пересечения окружности, построенной на диаметре O_1O_2, и окружности $(A_1, \sqrt{(AT)^2 + |r_2|^2})$, где (AT)—касательная к (O_1, r_1). **531.** Указание. Рассмотреть поворот с центром в точке A на угол 60°. **537.** Указание. Построить сначала какой-либо равносторонний треугольник так, чтобы вершины его лежали на прямых l_1, l_2 и l_3, а затем применить параллельный перенос. **539.** Указание. Рассмотреть множество таких точек, что отрезки касательных к окружности (O_1, r_1) конгруэнтны отрезку p; затем применить поворот вокруг центра O_1. **540.** Указание. Построить точку A', симметричную точке A относительно E. Затем на $[A'B]$ построить дугу сегмента, вмещающего угол $A'NB$. Этот угол легко определить из условий задачи. **541.** Указание. Выбрать на данных окружностях по точке M и N так, что $[MN] \cong a$. Далее построить множество точек, из которых $[MN]$ виден под углом φ. **549.** Указание. Построить точку P', симметричную точке P относительно (OB), и выразить угол $P'MQ$ через угол AOB. **550.** Указание. Построить общую касательную окружностей (O_1, r_1) и (O_2', r_2), где (O_2', r_2) — окружность, симметричная окружности (O_2, r_2) относительно данной прямой. **552.** Указание. Рассмотреть треугольник $A'CB$, симметричный треугольнику ABC относительно перпендикуляра к $[BC]$ в его середине. **557.** Указание. Сначала построить $\triangle ABC$. **560.** Указание. Сначала построить четырехугольник $ABE'C'$, гомотетичный искомому; A — центр гомотетии. **567.** Указание. По данным $\angle A$ и R сначала построить отрезок, конгруэнтный a. **568.** Указание. Задачу свести к задаче 560. **569.** Указание. Построить окружность, описанную около треугольника $A_0B_0C_0$, и рассмотреть преобразование подобия. **571.** Указание. Рассмотреть гомотетию с центром в точке $L = l_1 \cap l_2$. Если $l_1 \parallel l_2$, решение очевидно. **573.** Указание. Описать окружность с центром в произвольной точке, лежащей на одной из данных прямых, радиусом, конгруэнтным данному отрезку. **576.** Указание. Искомая и данная окружности гомотетичны относительно их точки касания. При этой гомотетии точке пересечения данных прямых соответствует точка пересечения касательных к данной окружности, параллельных данным прямым. **578.** Указание. Провести перпендикуляр из центра O данной окружности на данную прямую a (рис. 14). Учесть, что точка A' искомой окружности — точка пересечения (PA) и окружности, проходящей через точки M, Q и A. **579.** Указание. Сначала построить вспомогательную окружность, концентрическую искомой и проходящую через центр одной из данных окружностей (см. рис. 15). **580.** Указание. Через центр подобия S данных окружностей (O_1, r_1) и (O_2, r_2) проводится прямая SA, пересекающая искомую окружность в точке A', отличной

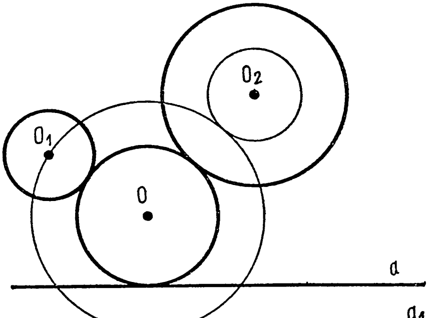


Рис. 15

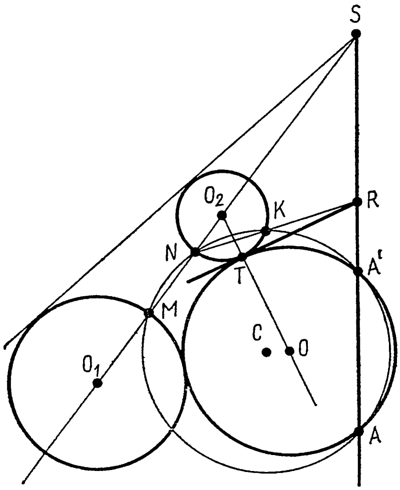


Рис. 16

от A. Обозначим через M и N те точки пересечения прямой O_1O_2 с данными окружностями, которые не соответствуют друг другу при гомотетии окружностей (O_1, r_1) и (O_2, r_2) с центром S (рис. 16). Окружность, проходящая через точки M, N и A, пересечет окружность (O_2, r_2) еще в точке K. Общая касательная к окружности (O_2, r_2) и искомой окружности проходит через точку $R = (NK) \cap (SA)$. **581.** Указание. Пусть S_{12} и S_{13} — центры гомотетии пар окружностей (O_1, r_1), (O_2, r_2) и (O_1, r_1), (O_3, r_3) (см. рис. 17). Пусть далее A_1—произвольная точка окружности (O_1, r_1), а $A_2 = (A_1S_{12}) \cap (O_2, r_2)$—точка, не соответствующая точке A_1 при гомотетии с центром S_{12}. $A_3 = (A_1S_{13}) \cap (O_3, r_3)$ — точка, не соответствующая точке A_1 при гомотетии с центром S_{13}. Окружность, проходящая через точки A_1, A_2, A_3, пересечет окружность (O_2, r_2), помимо точки A_2, еще в точке K. Общая касательная окружностей (O_2, r_2) и искомой проходит через точку $R = (S_{12}S_{13}) \cap (A_2K)$. **582.** См. рис. 18. **583.** См. рис. 19. **584.** Три дуги окружностей с концами в вершинах треугольника. **585.** Две прямые, каждая из которых параллельна общей касательной в точке A. **586.** Указание. Сначала построить образ искомой окружности при некоторой инверсии с центром A. **587.** Указание. Построить образ одной из данных точек при инверсии относительно данной окружности. **588.** Указание. См. указание к задаче 587. **596.** Указание. См. указание к задаче 579. **597.** Указание. Задачу свести к задаче 595. **600.** Указание. Рассмотреть инверсию с центром в одной из данных точек, свести задачу к построению общей касательной двух окружностей. **624.** Решение. Уравнение третьей степени разрешимо в квадратных радикалах, если оно имеет хотя бы один рациональный корень. Все рациональные корни приведенного уравнения с целыми коэффициентами являются целыми числами. А корни уравнения являются делителями свободного члена. Но числа $+1$, -1 —

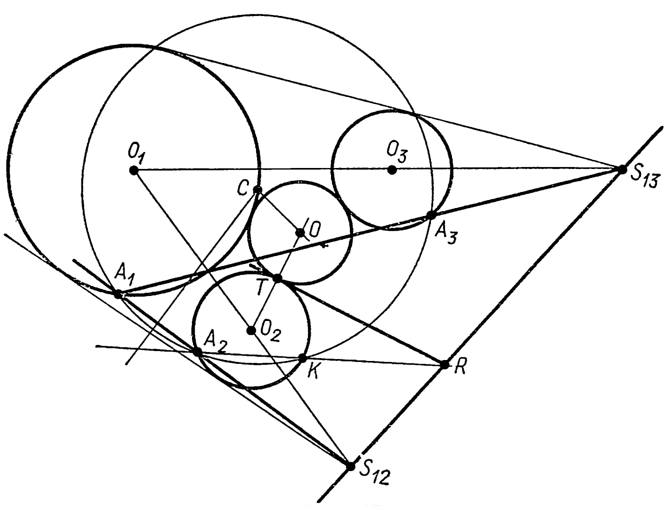


Рис. 17

целые делители свободного члена данного уравнения — не являются его корнями. Отсюда следует, что данное уравнение не имеет рациональных корней. **625.** Указание. Сделать данное уравнение приведенным и показать, что оно имеет целый корень; тогда данное уравнение будет иметь рациональный корень. **627.** Указание. Доказать, что уравнение $x^3 - 2a^3 = 0$ не разрешимо в квадратных радикалах. **628.** Решение. Пусть дан угол α, обозначим $\frac{\alpha}{3} = x$, тогда $\cos 3x = \cos \alpha$, $4 \cos^3 x - 3 \cos x - \cos \alpha = 0$; обозначив $\cos x = \frac{y}{2}$, $\cos \alpha = \frac{a}{2}$, получим: $y^3 - 3y - a = 0$. При некоторых значениях (например, $a = 1$) последнее уравнение не разрешимо в квадратных радикалах. **629.** Указание. Пусть требуется построить равнобедренный треугольник ABC (рис. 20). Тогда из

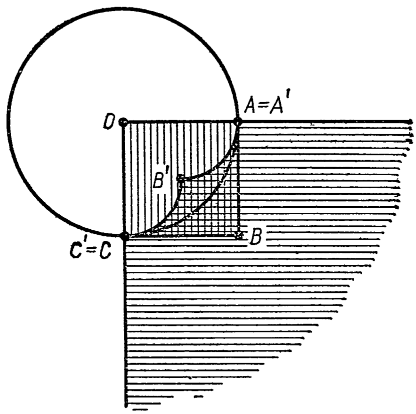


Рис. 19

$\triangle ABE$ имеем: $\frac{|AE|}{\sin B} = \frac{|AB|}{\sin BEA}$, или $\frac{|l|}{\sin (180° - 4x)} = \frac{|h|}{\sin 2x \sin 3x}$; $|h| = \frac{|l| \sin 3x}{2 \cos 2x}$. Пусть $|l| = 4|h|$, тогда получим следующее уравнение: $1 = \frac{2 \sin 3x}{\cos 2x}$, или $\cos 2x = 2 \sin 3x$. После преобразования имеем: $8 \sin^3 x - 2 \sin^2 x - 6 \sin x + 1 = 0$. **630.** Указание. Если точка X находится от данной точки и от данной прямой на расстояниях, сохраняющих постоянное отношение, то она лежит на коническом сечении. **631.** Указание. Пусть в искомом треугольнике $ABC\,[AB] \cong [BC]$; $[BE]$ и $[AD]$ — высоты треугольника. Из треугольников ADC и ABE, пользуясь тригонометрическими соотношениями, получаем: $4R \sin^3 \alpha - 4R \sin \alpha + a = 0$, где $\alpha = \widehat{ABE}$, $a = |AD|$, R — радиус данной окружности. **632.** Указание. Использовать теорему Эйлера. Окружность можно разделить на n равных частей, если $n = 2^k p_1 p_2 \ldots p_l$, где $p_1, p_2, \ldots, p_l$ — различные простые числа вида $2^{2^k} + 1$, k — целое, положительное. **633.** а) да, б) да, в) нет, г) нет, д) да, е) да. **639.** Построение. 1. (A, r), 2. (B, r), 3. $C = (A, r) \cap (O, [AB])$, 4. $D = (B, r) \cap (O, [AB])$, 5. $E = (C, [CB]) \cap (D, [CB])$, 6. $F = (C, [OE]) \cap \cap (D, [OE])$, F — искомая. **642.** Указание. Для решения задачи применить метод инверсии. **643.** Указание. См. указание к задаче 642. **652.** Плоскость, перпендикулярная (AB). **654.** а) Одна точка; б) прямая, перпендикулярная к плоскости (ABC). **655.** а) Плоскость, б) объединение двух взаимно перпендикулярных плоскостей. **656.** а) Объединение двух прямых, перпендикулярных к плоскости, содержащей данные прямые; б) объединение четырех прямых, перпендикулярных к плоскости, в которой лежат данные прямые; в) объединение четырех прямых, проходящих через точку пересечения данных прямых; г) прямая, параллельная данным.

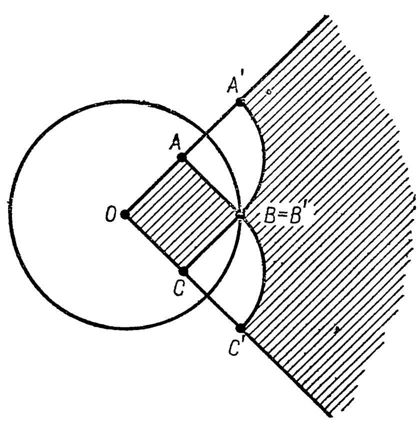


Рис. 18

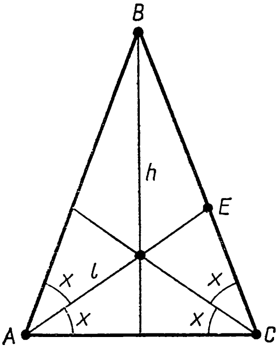


Рис. 20

659. а) Объединение двух прямых, параллельных линиям пересечения данных плоскостей; б) объединение четырех прямых, параллельных линиям пересечения данных плоскостей; в) объединение четырех прямых, проходящих через точку пересечения данных плоскостей. **663.** Сфера с диаметром AB. **664.** Сфера с центром в середине данного отрезка. **665.** Окружность Аполлония в плоскости П. **666.** Сфера Аполлония. **667.** Окружность, точка или $\varnothing$. **668.** Цилиндрическая поверхность. **669.** Пара плоскостей, проходящих через линию пересечения Π_1 и Π_2 (за исключением точек, принадлежащих $\Pi_1 \cap \Pi_2$); если данные различные плоскости параллельны — пара плоскостей, параллельных данным. **670.** Объединение пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, параллельной данным прямым и равноудаленной от них. **673.** Два пучка прямых с центром в данной точке, принадлежащих двум взаимно перпендикулярным плоскостям, каждая из которых перпендикулярна плоскости, параллельной данным прямым. **674.** Два пучка прямых с центром A, лежащих в плоскостях, параллельных биссекторам плоскостей Π_1 и Π_2, если плоскости пересекаются; связка прямых с центром A, если $\Pi_1 \parallel \Pi_2$. **675.** Объединение прямых, принадлежащих биссекторам плоскостей Π_1 и Π_2 и не параллельных линии $l = \Pi_1 \cap \Pi_2$. **676, 677.** Коническая поверхность, плоскость или прямая. **679.** Цилиндрическая поверхность с осью l_2. **680.** Цилиндрическая поверхность. **681.** Коническая поверхность. **691.** Р е ш е н и е. Дано: l и $C\ (O, R)$. 1) $\Pi = (l, O)$; 2) В плоскости П: (O, R) — окружность; 3) $l \cap (O, R) = \{A, B\}$ — искомые точки. **693.** Р е ш е н и е. Дано: $K\ (A, l_0, \varphi_0)$, $\Pi \perp l_0$. 1) $\Pi \cap l_0 = O$; 2) $(AO) \in \Pi_1$; $l \in \Pi_1$, $A \in l$, $(\widehat{l_0, l}) = \varphi_0$; 3) $l \cap \Pi = M$; 4) $(O, [OM])$ в плоскости П. **697.** Р е ш е н и е. Дано: $S\ (O, r)$, l. 1) $\Pi \perp l$, $O \in \Pi$; 2) $\Pi \cap l = B$; 3) В плоскости П $\{A_1, A_2\} = (O, r) \cap (O_1, [OB])$, где O_1 — середина отрезка OB; 4) $\Pi_1 = (l, A_1)$, $\Pi_2 = (l, A_2)$ — искомые плоскости. **715.** У к а з а н и е. См. задачи 658 б) и 659 в). **742.** У к а з а н и е. При параллельном проектировании сохраняется простое отношение коллинеарных точек. **744.** У к а з а н и е. Диаметр, перпендикулярный к параллельным хордам окружности, делит эти хорды пополам. **745.** Р е ш е н и е. Пусть $[MN]$ и $[PQ]$ — сопряженные диаметры эллипса, $O = [MN] \cap [PQ]$. Повернем $[OM]$ на 90° вокруг точки O, получим $[OM_1]$. Пусть L — середина отрезка M_1P, а $\{X, Y\} = (OL) \cap (L, [LP])$. Тогда полуоси эллипса конгруэнтны $[OX]$ и $[OY]$ и параллельны (M_1X) и (XP). **746.** У к а з а н и е. Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, делит перпендикулярный к ней радиус пополам. **747.** У к а з а н и е. Точки касания сторон правильного треугольника, описанного около окружности, являются серединами сторон этого треугольника (см. также № 744). **748.** У к а з а н и е. См. задачу 744. Для нахождения точек касания сначала построить изображение треугольника, вписанного в окружность. **749.** У к а з а н и е. См. задачи 744 и 746. **751.** У к а з а н и е. Высоты правильного треугольника ABC изображаются медианами треугольника ABC. **752.** У к а з а н и е. Построить изображение ортоцентра треугольника $\overline{PMN}$, где $\overline{M} \in \overline{l}$, $\overline{N} \in \overline{l}$ и $(\overline{PN})$ параллельна одной из сторон, а $(\overline{PN})$ параллельна одной из диагоналей квадрата. **756.** а) S_α есть тождественное преобразование плоскости изображений П; б) вторичная проекция A_3 одинакова для всех точек A плоскости $\overline{\alpha}$, лежащих на одной прямой, параллельной оси $(\overline{OZ})$, соответствие S_α не является взаимно-однозначным; в) проекция плоскости $\overline{\alpha}$ есть прямая, S_α не существует. **758.** У к а з а н и е. Использовать соответствие S_α, см. задачу 756. **759.** $L = l \cap l'$, где l' соответствует l_3 в преобразовании $S\alpha$ (см. задачу 756). **760.** У к а з а н и е. Найти точки пересечения двух из прямых $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ с плоскостью, заданной следами (см. задачу 759). **762.** У к а з а н и е. Задача сводится к отысканию двойных точек преобразования $S_\beta^{-1}S_\alpha$ (см. задачу 756). **765.** У к а з а н и е. См. задачу 744. **766.** У к а з а н и е. Построить изображения

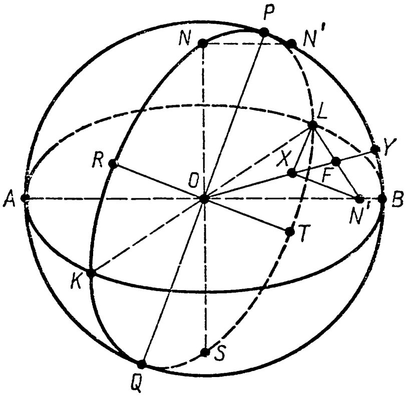


Рис. 21

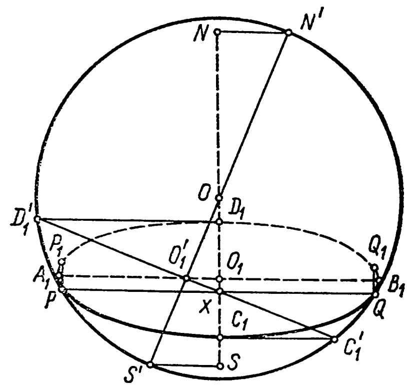


Рис. 22

серединных перпендикуляров к сторонам треугольника $\overline{MNP}$. **769.** Указание. Если $(AK) \parallel (A_3B_3)$, то треугольник ABK является изображением прямоугольного треугольника, катеты которого $[AK]$, $[BK]$ можно найти (см. задачу 764). **770.** Указание. Найти длину проекции отрезка $\overline{AB}$ на ось $(\overline{OX})$ (см. задачу 764). **771.** Указание. Пусть $\overline{\alpha} \cap (\overline{OX}) = A$, $\overline{\alpha} \cap (\overline{OY}) = \overline{B}$, $\overline{\alpha} \cap (\overline{OZ}) = \overline{C}$. Если $(\overline{OP})$ — искомый перпендикуляр, то $\overline{P}$ — ортоцентр треугольника $\overline{ABC}$. **772.** Указание. В плоскости $\overline{\alpha}$ построить ортоцентр треугольника, отсеченного прямой $\overline{l}$ на сторонах треугольника с вершинами: $\overline{A} = \overline{\alpha} \cap (\overline{OX})$, $\overline{B} = \overline{\alpha} \cap (\overline{OY})$, $\overline{C} = \overline{\alpha} \cap (\overline{OZ})$ (см. задачу 771). **773.** Указание. Сначала построить какую-либо плоскость, перпендикулярную к данной прямой. **776.** $Y\hat{O}Z = 97° 1'$, $X\hat{O}Z = 127° 59'$, $l_x = 0{,}468$, $l_y = 0{,}936$, $l_z = 0{,}950 = 1{,}015\ l_y$. **777.** $Y\hat{O}Z = 96° 57'$, $X\hat{O}Z = 143° 3'$, $l_x = 0{,}482$, $l_y = 0{,}964$, $l_z = 0{,}915 = 0{,}949 l_y$. **778.** Указание. Аксонометрические оси направлены по биссектрисам треугольника, стороны которого относятся, как $4^2 : 5^2 : 6^2$. **781.** Указание. Если N — искомый полюс, то $[NN']$ конгруэнтен малой полуоси экватора, где $(NN') \perp (ON)$ и $N' \in$ очертанию сферы. **782.** Указание. Воспользоваться задачей 745 (рис. 21). **783.** Решение. Пусть (O, R) — очертание сферы, N и S' — полюсы (рис. 22).

1. $(NN') \perp (ON)$, $N' \in (O, R)$;
2. $O_1' \subset [OS']$, O_1' — середина $[OS']$;
3. $l \perp (N'S')$, $O_1' \in l$;
4. $l \cap (O, R) = \{D_1', C_1'\}$;
5. $l_1 \perp (NO)$; $O_1' \in l_1$;
6. $A_1, B_1 \in l_1$, $[O_1 A_1] = [O_1B_1] = [O_1'D_1']$;
7. $(D_1'D_1) \parallel (A_1B_1)$; $D_1 \in (NS)$;
   $(C_1'C) \parallel (A_1B_1)$; $C_1 \in (NS)$;
8. $l \cap (ON) = X$.
9. $l_3 \parallel (A_1B_1)$; $l_3 \cap (O_1R) = \{P, Q\}$ — точки касания сечения с очертанием сферы (рис. 22). **784.** Указание. Построить изображение правильного треугольника, описанного около экватора (см. задачу 747). **785.** Указание. Решается аналогично задаче 784. **786.** Указание. Найти отношение, в котором центр сферы делит высоту тетраэдра, затем см. задачу 783. **787.** Указание. В диагональной плоскости призмы лежит прямоугольник с отношением сторон, равным 2 : 1. Чтобы найти точку O_1 на оси, через которую проходит основание призмы, нужно построить $\angle N'OC_1'$ так, чтобы тангенс его равнялся $\frac{1}{2}$, где $(NN') \perp (ON)$, N' — на очертании сферы. Далее см. задачу 783. **788.** Указание. Пусть дан отрезок a. $D_1' =$

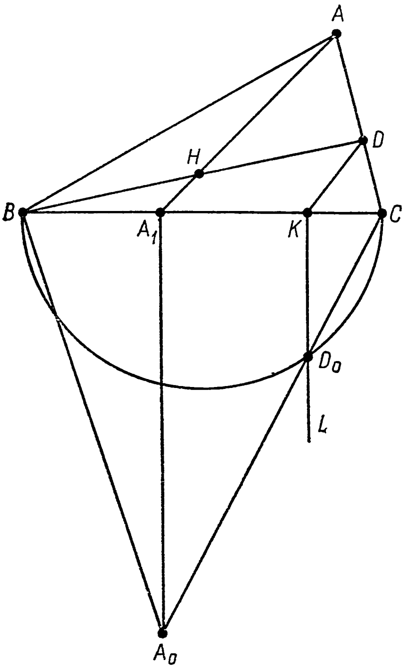


Рис. 23

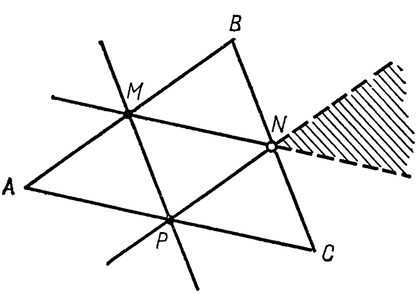


Рис. 24

$= (O_1, R) \cap (N', a)$ (см. рис. 22, задачу 783. **789.** Указание. При построении очертания сферы применить результат задачи 745. **790.** Указание. Центр сферы, вписанной в тетраэдр, делит высоту тетраэдра в отношении 3 : 1, считая от вершины. Построить пару сопряженных диаметров какого-либо меридиана. Далее см. задачу 745. **791.** Указание. Решается аналогично задаче 790. **793.** Основание $ABCD$ изображаем в виде произвольного параллелограмма; три вершины A_1, B_1, C_1 верхнего основания отмечаем на боковых ребрах также произвольным образом. При построении четвертой вершины D_1 следует учесть то обстоятельство, что прямая, соединяющая точки пересечения диагоналей обоих оснований, параллельна боковым ребрам призмы. **795.** Плоскость $\overline{\alpha}$ параллельна плоскости $\overline{SPQ}$, где $(\overline{SP}) = (\overline{SAB}) \cap (\overline{SCD})$, $(\overline{SQ}) = (\overline{BCS}) \cap (\overline{SDA})$. **798.** Основание пирамиды изображаем любым параллелограммом, основание высоты—точкой пересечения диагоналей основания пирамиды. Вершины верхнего основания куба делят каждое из боковых ребер пирамиды в одном и том же отношении. **799.** Указание. Каждая из искомых точек получается в пересечении образующей цилиндра с прямой, соединяющей данную точку M с точкой на данной прямой. **803.** Указание. Около верхнего основания цилиндра описать четырехугольник. **804.** Нельзя, так как изображение неполное. **805.** Указание. На стороне BC треугольника ABC построить треугольник BCA_0, подобный оригиналу, а в нем ортоцентр H_0. Изображение H ортоцентра можно найти из условия $|A_0H_0| : |H_0D| = |AH| : |HD|$, D — середина отрезка BC. **806.** Решение. Пусть $D = (BH) \cap (AC)$ и $(DK) \parallel (AH)$, $K \in (BC)$. На стороне BC построим треугольник BCA_0, подобный оригиналу. Для этого найдем точку D_0 пересечения окружности диаметра $[BC]$ и прямой KL, перпендикулярной (BC) (рис. 23). **807.** Указание. На стороне AB параллелограмма — изображения квадрата, построить квадрат и в него вписать правильный треугольник с вершиной M. **808.** Указание. Решается аналогично задаче 807. **809.** Указание. Найти отношение диагонали пятиугольника к его стороне. Для восьмиугольника найти отношение его диагонали к стороне, вписанного в него квадрата. **811.** Указание. Основание изобразить произвольным треугольником ABC, а основание высоты выбрать в заштрихованной области (M, N, P — середины сторон треугольника ABC) (рис. 24). **812.** Указание. См. указание к предыдущей задаче. **813.** Указание. Пусть N — середина отрезка SD. В треугольнике SAD провести $(NQ) \parallel (AH)$ (H — изображение ортоцентра треугольника $\overline{ADN}$). **814.** Указание. Апофема пирамиды конгруэнтна стороне основания. **815.** Указание. а) Через P и высоту AH к грани $\overline{SBC}$ провести плоскость и в ней $(\overline{PQ}) \parallel (\overline{AH})$. **816.** Указан и е. б) Если $(\overline{CH}) \perp$ плоскости $(\overline{ABC})$ и $(\overline{C_1H}) \cap (\overline{AB}) = \overline{D}$, то $|\overline{DH}| : |\overline{HC_1}| = |CD|^2 : |CC_1|^2$. **817.** У к а з а н и е. а) См. указание к задаче 813. б) На отрезке BC построить треугольник BS_0C, подобный $\overline{BSC}$, и его высоту BK. **818.** У к а з а н и е. См. рис. 25. **819.** У к а з а н и е. Плоскость $(\overline{C_1BD})$ перпендикулярна диагонали $(\overline{A_1C})$. **820.** См. указание к предыдущей задаче. **821.** У к а з а н и е. Если осью призмы служит диагональ куба $[\overline{A_1C}]$, то основания лежат в плоскостях $(\overline{D_1B_1A})$ и $(\overline{C_1DB})$. **823.** Если $l_1 \perp \sigma_1$, то $l_2 \parallel x$. **824.** а) Горизонтальная проекция l_1 вырождается в точку, а фронтальная проекция $l_2 \perp x$; в) обе проекции l_1 и l_2 совпадают в одну прямую m, перпендикулярную к оси проекций x; в этом случае проекции l_1 и l_2 не определяют прямую $\overline{l}$: в качестве $\overline{l}$ может быть взята любая прямая,

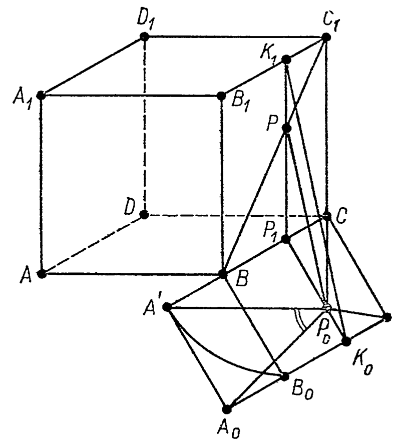


Рис. 25

лежащая в плоскости $\overline{\beta}$, содержащей прямую m и перпендикулярной к оси проекций. **825.** Если точки $A_1 = l_1 \cap m_1$ и $A_2 = l_2 \cap m_2$ лежат на одном перпендикуляре к оси проекций, то прямые $\overline{l}$ и $\overline{m}$ пересекаются в точке $\overline{A}$ (A_1, A_2); в противном случае они скрещиваются. **826.** Пусть фронтальная проекция l_2 прямой $\overline{l}$ пересекает ось проекций x в точке L_2; перпендикуляр, проведенный к x из точки L_2, пересечет горизонтальную проекцию l_1 в точке $P_1 = \overline{l} \cap \sigma_1$, которая и будет искомым горизонтальным следом прямой $\overline{l}$. Аналогично строится фронтальный след P_2. Если на эпюре даны следы прямой $\overline{l}$: $P_1 = \overline{l} \cap \sigma_1$ и $P_2 = \overline{l} \cap \sigma_2$, то опускаем из точки P_2 перпендикуляр на ось проекций x; если M_1 есть основание этого перпендикуляра, то $l_1 = (M_1P_1)$.

В предыдущем рассуждении предполагается, что не имеют место особые случаи, перечисленные в задаче 824. **827.** У к а з а н и е. См. решение задачи 826. **828.** У к а з а н и е. Пусть $P_1 = l_1 \cap p_1$, $Q_1 = l_1 \cap g_1$, построить точки P_2 и Q_2, фронтальная проекция искомой точки есть точка $L_2 = (P_2Q) \cap l_2$. **829.** У к а з а н и е. Найти следы прямых, лежащих в плоскости (см. задачу 826). **830.** У к а з а н и е. а) Использовать перспективно аффинное соответствие между проекциями M_1 и M_2 точек плоскости. **831.** Следы прямой принадлежат следам плоскости. **832.** У к а з а н и е. Найти сначала следы искомой прямой. **834.** а) $l_1 \parallel$ линии горизонта; б) l_1 совпадает с основанием картины; в) l_1 проходит через главную точку; г) l_1 проходит через главную точку; д) перспектива l прямой $\overline{l}$ есть точка. **835.** У к а з а н и е. При построении оси использовать то, что точки B и B_1, прямые a и a_1 находятся в перспективно аффинном соответствии S_α. Линия схода плоскости содержит точки схода лежащих в ней прямых. **838.** У к а з а н и е. Точка схода прямой $\overline{l}$ принадлежит линии схода плоскости $\overline{\alpha}$. **839.** У к а з а н и е. Построить ось плоскости α проходящей через прямую $\overline{b}$ и точку $\overline{A}$. В соответствии S_α построить образ b' прямой b. **840.** У к а з а н и е. Линия схода плоскости $\overline{\alpha}$ служит линией схода и для плоскости $\overline{\beta}$. **841.** У к а з а н и е. Построить прямую l', соответствующую l в S_α. **842.** У к а з а н и е. Точка схода любой прямой плоскости $\overline{\alpha}$, проходящей через точку $\overline{M}$, лежит на линии схода. **844.** Нет; например, аксиома VI не выполняется. **845.** Аксиома E4 не выполняется, остальные аксиомы выполнены. **847.** Аксиома T2 не выполняется, остальные аксиомы выполнены. **848.** Аксиома T2 не выполняется. **849.** Аксиома T3 не выполняется. **851.** У к а з а н и е. Вектором назвать матрицу A_{41}, точкой — однородную систему трех независимых уравнений с четырьмя неизвестными. **854.** У к а з а н и е. Линейные операции над векторами определить по аналогии с задачей 846. Псевдоевклидово произведение векторов $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ можно определить так:

$\Sigma\varphi_{i\gamma}a_i b_\gamma$, где $\Sigma\varphi_{i\gamma}x_i y_\gamma$ — квадратичная форма сигнатуры один. **857.** Указание. По аналогии с интерпретацией, данной в задаче 846, построить интерпретации пространств TE_2 и TE_4. 858. Указание. См. задачу 846; скалярное произведение векторов A_{31} и B_{31}, установленных вектором U_{31}, можно определить так: $\dfrac{a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{11}b_{31}}{2(u_{11}^2 + u_{22}^2 + u_{31}^2)}$. **859.** Указание. См. интерпретации, указанные в задачах 847 и 848. **860.** Указание. См. интерпретацию, указанную в задаче 849. **862.** Указание. Применить аксиому E5 к векторам $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$; воспользоваться свойствами скалярного произведения. **863.** Указание. Применить аксиому E5. **864.** Указание. См. задачу 862. **865.** Если $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — различные векторы измерения, то $|\boldsymbol{a}|_u = |\boldsymbol{v}|_u |\boldsymbol{a}|_v$. **866.** Указание: а) см. задачу 863; б) применить аксиому E5 и предложение а). **867.** Указание. См. задачу 865. **869.** Указание. а) См. задачу 868; данное соотношение эквивалентно соотношению $(\boldsymbol{ab})^2 = (\boldsymbol{aa})(\boldsymbol{bb})$. б) Применить предложение а) и тождество: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{aa} + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{bb}$. **870.** Указание. Применить соотношение $\boldsymbol{ab} \leqslant |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ и тождество: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{aa} + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{bb}$. **871.** Указание. См. задачи 870 и 869. **872.** Указание. Пусть $\boldsymbol{a}_0 = \dfrac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|}$, $\boldsymbol{b}_0 = \dfrac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|}$. С помощью тождества $\overline{BC}\cdot\overline{BC} = (\overline{AC} - \overline{AB})(\overline{AC} - \overline{AB})$ сначала показать, что $|\overline{BC}|^2 = |\overline{AC}|^2 + |\overline{AB}|^2 - 2\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{b}_0|\overline{AC}||\overline{AB}|$. **873.** Указание. Применить тождество: $\overline{BC}\cdot\overline{BC} = \overline{BC}\cdot\overline{BA} + \overline{BC}\cdot\overline{AC}$. **874.** См. задачу 872. **875.** Указание. См. задачу 873. **876.** Указание. Пусть O — точка пересечения прямых, содержащих две высоты, а $\boldsymbol{r}_1 = \overline{OA}$, $\boldsymbol{r}_2 = \overline{OB}$, $\boldsymbol{r}_3 = \overline{OC}$. Применить тождество:

$$(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{r}_3 + (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_2 = 0.$$

877. Указание. Если $\boldsymbol{a}_0$ и $\boldsymbol{b}_0$ — единичные векторы, направленные по сторонам угла, то $\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0$ принадлежит биссектрисе угла. **881.** Указание. Если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — некомпланарные векторы, то множество всех векторов вида $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ образует область (α и β — любые действительные числа). **886.** Указание. Пусть $\boldsymbol{a} = (A, \boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{b} = (B, \boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{r}$ — ненулевой вектор, ортогональный векторам $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$. Рассмотреть плоскости $(A\boldsymbol{pr})$ и $(B\boldsymbol{qr})$. **891.** Указание. При проверке аксиом группы Г3 воспользоваться следующими Л-движениями: а) вращением вокруг центра O абсолюта; б) отражением относительно любого диаметра абсолюта; в) преобразованием:

$$x' = \frac{-x + a}{-ax + 1}, \quad y' = \frac{-y\sqrt{1 - a^2}}{-ax + 1}$$

(предполагается, что начало декартовой системы координат помещено в центре абсолюта). **893.** Указание. Сначала доказать: соответствие T—преобразование Ω_0. **895.** Указание. Применить теоремы о том, что орициклы, эквидистанты и окружности являются ортогональными траекториями параболических, гиперболических и эллиптических пучков прямых соответственно. **896.** Если прямая l — образ абсолюта, то основные объекты интерпретируются так: точки Лобачевского — все евклидовы точки, принадлежащие одной из полуплоскостей, определяемых прямой l; прямые Лобачевского — все полуокружности этой полуплоскости с центрами на прямой и ортогональные ей, а также лучи полуплоскости, исходящие из точек прямой l и ортогональные ей. **897.** Указание. См. предложение а); д) см. предложение г); з) см. предложение а); и) см. предложение ж). **898.** Нет. Указание. См. задачу 888. **899.** Указание. Исключить из числа основных объектов одну из прямых. **900.** Нет, аксиома III,5 не выполняется. **901.** См. задачу 900. **903.** Указание. Сначала показать, что для данных прямых всегда существует хотя бы одна прямая равного наклона; далее применить предложение а). Если прямые AA' и BB' пересекаются, то предложения а) и б) не справедливы. **904.** Указание. а) См. задачу 902; б) см. предложение а). **905.** Указание. Рассмотреть серединные перпендикуляры отрезков AB, BC и AC; далее см. задачу 904, а). **908.** Указание. б) Рассмотреть прямые, проходящие через B и параллельные a. **909.** Указание. а) Сначала показать, что диагонали четырехугольника конгруэнтны. б) На луче DC взять точку B' так, чтобы $[AB] \cong [DB']$, и применить предложение а). **910.** Указание. г) Пусть E — середина $[BC]$. Отложить от точки E на лучах EB и EC отрезки длины $\frac{|AD|}{2}$ и применить предложения а) и б). **912.** Указание. Пусть перпендикуляры l_1 и l_2 в серединах сторон AB и BC расходятся. Рассмотрим прямую l, перпендикулярную l_1 и l_2. Из вершин треугольника опустим перпендикуляры AA_1, BB_1 и CC_1 на прямую l. Сначала показать, что $[AA_1] \cong [BB_1] \cong [CC_1]$. **913.** Указание. См. задачу 912. **916.** Указание. Пусть M — данная точка, O — центр данной окружности. Рассмотреть треугольники AMO и BMO. **919.** Указание. Пусть $[AB]$ — данный отрезок. Рассмотреть полюс прямой AB. **920.** Указание. Пусть UV — прямая, содержащая одну из сторон данного угла. Рассмотреть полюс прямой UV. **921.** Указание. Рассмотреть автоморфную коллинеацию, при которой точки K_1, K_2, K, D и касательные t_1 и t_2 переходят соответственно в K_1', K_2', K', D' и касательные t_1' и t_2' (см. рис. 26). Построить образ точки пересечения луча l с абсолютом при этой коллинеации. Задача имеет два решения. **922.** Указание. Задача решается аналогично предыдущей. **923.** Указание. Пусть U и V — концы хорды, изображающей прямую AB. Задача сводится к построению двойной точки инволюции на прямой AB, в которой (A, B) и (U, V) являются парами соответствующих точек. **924.** Указание. Пусть K и L — точки, в которых лучи k и l пересекают абсолют. Искомая биссектриса принадлежит оси автоморфной гомологии, при которой точка K переходит в точку L. **925.** Указание. Использовать идею решения задачи 924. **926.** Указание. Сначала построить полюсы данных прямых. **927.** Указание. Построить окружность, проходящую через точки A, B и A', где A' — точка, инверсная A относительно абсолюта. **928.** Указание. Построить точку A', инверсную точке A относительно абсолюта. **929.** Указание. Построить две точки A_1 и A_2, инверсные точке A относительно абсолюта и окружности, которая содержит изображение прямой a. **930.** Окружность, проходящая через точку A и касающаяся абсолюта в точке V. **931.** Окружность, проходящая через точки A и B, касающаяся абсолюта. Задача имеет два решения. **932.** Указание. Сначала построить изображение прямой AO и еще одной прямой, проходящей через точку O. Далее через точку A провести окружность, ортогональную окружностям, которые изображают построенные прямые. **933.** Окружность, проходящая через точку A и ортогональная окружностям, изображающим данные прямые. **934.** а) $a \leqslant t \leqslant b$; б) $0 \leqslant t \leqslant 1$; в) $0 \leqslant t < \infty$; г) $0 < t < 1$; д) $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$; е) $0 \leqslant t < 1$. **935.** Указание. Воспользоваться примерами б) и е) задачи 934. **936.** Указание. Воспользоваться примерами г) и д) задачи 934, а также предыдущей задачей. **937.** Указание. б) Допустимое изменение параметра: $t = u^3 + 1$, $-1 \leqslant u \leqslant \sqrt[3]{2\pi - 1}$; в) точка $\left(0, -1, \frac{3\pi}{2}\right)$ принадлежит l_3, но не принадлежит l_4; г) учесть, что путь l_1 определяет кривую, лежащую в плоскости XOY, а путь l_3 определяет пространственную кривую. **938.** (l_1) — да, (l_2) — нет. **940.** а) Нет. б) Да. в) Да. г) Да. д) Нет. **941.** Указание.

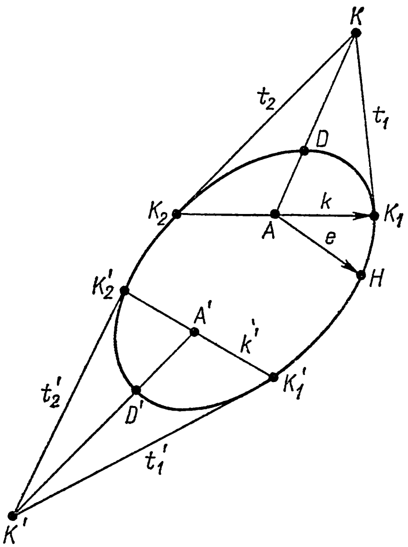


Рис. 26

Рассмотреть допустимое изменение параметра $t = \operatorname{ctg}\frac{u}{4}$ и выразить $\cos u$ и $\sin u$ через $\cos\frac{u}{4}$ и $\sin\frac{u}{4}$. **942.** Например, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\cos t + \boldsymbol{j}\sin t + \boldsymbol{k}(1 - \cos t - \sin t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. **943.** Одно из параметрических представлений: $x=\cos^2 t$, $y = \sin t$, $z= =\cos t$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. **944.** $x = t$, $y = t^2 + 1$, $z = 0$; $x = t$, $y = 0$, $z = (t-1)^3$. **945.** $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + (t^2+2)\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{r} = (t^2+2)\boldsymbol{j} + (t^3+t)\boldsymbol{k}$. **946.** $\frac{1}{2}$. **947.** $\varphi_0 = 60°$. **952.** $x = 2\sin^2\varphi$, $y = 2\sin^2\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. **953.** $s_0 = \frac{a(e^2-1)}{\sqrt{2}\cdot e}$.

954. $2a^2\left(-1+\frac{\pi}{2}\right)$. **955.** $\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$. **956.** $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$. **957.** $\sqrt{3}(e^{\pi}-1)$.

958. $x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $z = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **959.** Указание. Ввести параметр $u = t + \sqrt{t^2+1}$ и применить соотношение: $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{du}\cdot\frac{du}{dt}$.

960. $t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)$; $x = \left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\cos\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)$, $y = \left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\times$ $\times\sin\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)$, $z = \frac{s}{\sqrt{3}}+1$. **961.** а) $\frac{x-\frac{1}{4}}{1} = \frac{y+\frac{1}{3}}{-1} = \frac{z-\frac{1}{2}}{1}$;

б) $\frac{x-4}{4} = \frac{y+\frac{8}{3}}{-2} = \frac{z-2}{1}$. **962.** $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$. **963.** $x = \cos t + \sin t$, $y = \sin t - \cos t$, $z = 0$. **964.** $\varphi_0 = 45°$, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$. **965.** $\varphi_0 = 45°$. **966.** Указание. Достаточно показать, что $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = 0$. **967.** $bx - ay + abz + 2ab = 0$. **968.** $e^{-t}x - e^{t}y - \sqrt{2}\cdot z + 2t = 0$. **969.** $\cos\varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **970.** Указание. Показать, что все точки M_1, M_2, ..., M_k лежат в плоскости $by_0x - bx_0y + a^2z = a^2z_0$ где (x_0, y_0, z_0) — координаты фиксированной точки. **972.** $x + y + 12z - 222 = 0$. **975.** $\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-1}$ — уравнения бинормали. $\frac{x-1}{31} = \frac{y-1}{26} = \frac{z-1}{-22}$ — уравнения главной нормали. **976.** $6x + 3y - 6z - 2 = 0$. **977.** $x = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{-1}$. **978.** $(-1, 0, 0)$. **979.** Указание. Воспользоваться уравнениями главной нормали. Учесть, что $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}\cos t + \boldsymbol{j}\sin t$ — орт главной нормали. **980.** Указание. Показать, что $\boldsymbol{t} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно орты касательной и бинормали.

981. $\frac{x-\frac{3\sqrt{2}}{8}}{\sqrt{2}} = \frac{y-\frac{1}{3}}{1}$, $z = \frac{\sqrt{2}}{8}$ — касательная; $\frac{x-\frac{3\sqrt{2}}{8}}{-\sqrt{2}} = \frac{y-\frac{1}{3}}{2}$, $z = \frac{\sqrt{2}}{8}$ — бинормаль; $\begin{cases} x-\frac{3\sqrt{2}}{8} = 0 \\ y-\frac{1}{3} = 0 \end{cases}$ — главная нормаль; $12\sqrt{2}x - 24y - 1 =$

$=0$ — соприкасающаяся плоскость; $12\sqrt{2}\,x+12y-13=0$ — нормальная плоскость; $8z-\sqrt{2}=0$ — спрямляющая плоскость. **985.** Указание. Две точки, для которых $x=\pm\dfrac{a}{\sqrt[4]{2}}$. **986.** $\dfrac{x-1}{\cos t}=\dfrac{y}{\sin t}$, $z-bt=0$ — уравнения главной нормали.

987. Точки, параметры которых удовлетворяют равенству: $\sin\dfrac{t}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **988.** Указание. Две точки, для которых $x=\pm\dfrac{a}{\sqrt[8]{9}}$. **989.** $\varphi_0=45°$. Указание. Неизменное направление определено вектором $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$. **992.** $x=at$, $y=a$, $z=3a\sin\dfrac{t}{2}$, $-\infty<t<\infty$. Синусоида, лежащая в плоскости $y-a=0$. **993.** $(\cos t-\sin t)\,x+(\sin t+\cos t)\,y+e^t=0$. **995.** $x=a\sin t+b\cos t$, $y=bt-a$, $z=a\cos t-b\sin t$, $-\infty<t<\infty$. **996.** $x=\cos t-5\operatorname{ctg} t$, $y=t$, $z=\sin t-5$, $-\infty<t<\infty$. **997.** $\cos\theta=\cos\alpha\sqrt{1+\sin^2\alpha}$. **998.** $k=\dfrac{2}{9}$, $\varkappa=-\dfrac{2}{9}$. **999.** $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{-2}=\dfrac{y+\frac{2}{3}}{1}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{2}$; $k=\dfrac{2}{9}$. **1000.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{-2}=\dfrac{z-\frac{1}{6}}{2}$; $\varkappa=\dfrac{4}{9}$.

1001. $x-y+3=0$. **1003.** $\varkappa_0=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **1004.** $\boldsymbol{t}_0=\dfrac{\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{2}}$, $\boldsymbol{n}_0=\dfrac{2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{6}}$, $\boldsymbol{b}_0=\dfrac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}$, $k_0=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $\varkappa_0=1$. **1005.** $(0,\ 1,\ 1)$. **1006.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-\frac{1}{3}}{-1}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{2}$; $\varkappa_0=\dfrac{8}{9}$. **1007.** $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{4}$. **1010.** Указание. Кривую L^* представить в виде $\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(s)+\alpha(s)\,\boldsymbol{b}(s)$, где $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ — векторное параметрическое представление кривой L, а $\boldsymbol{b}(s)$ — вектор бинормали этой кривой. Сначала показать, что $\alpha=\mathrm{const}$, а далее показать, что кручение $\varkappa$ кривой L равно нулю. **1011.** Указание. Задача решается аналогично предыдущей. **1012.** а) $k=\dfrac{a}{a^2+b^2}$; $\varkappa=\dfrac{b}{a^2+b^2}$; б) $k=\varkappa=\dfrac{a\sqrt{2}}{s^2+4a^2}$; в) $k=\dfrac{a\sqrt{2}}{s\sqrt{2a^2+b^2}}$, $\varkappa=\dfrac{b}{s\sqrt{2a^2+b}}$.

1014. Указание. Сначала показать, что $R=\dfrac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$. **1016.** Касательная: $x=4$, нормаль: $y=\dfrac{2}{3}$. **1017.** Две касательные: $y-2=\sqrt{3}\,x$ и $y-2=-\sqrt{3}\,x$. **1018.** $y=ce^{-\frac{x}{a}}$, где $c=\mathrm{const}$. Указание. Воспользоваться формулой для выражения подкасательной $-\left(\dfrac{dx}{dy}\right)_0 y_0$ в точке $(x_0,\,y_0)$ кривой. **1019.** $y^2=2ax-c$, где $c=\mathrm{const}$. Указание. Воспользоваться формулой для выражения поднормали $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0 y_0$ в точке $(x_0,\ y_0)$ кривой. **1020.** $(x-c)^2+y^2=a^2$, где

$c = \text{const}$. **1021.** $x = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right) + c$, $y = a\sin t$, где $c = \text{const}$. **1023.** $\frac{20}{3}\sqrt{10}$.
1024. $-\frac{1}{2}$. **1025.** $\operatorname{arctg}\varphi$. **1027.** $\left(\frac{9}{8}, \pm 3\right)$. **1029.** $x = \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t$, $y = -\frac{1}{4}\cos 2t$. **1030.** $k = \frac{1}{\sqrt{2s}}$, где k — кривизна, а s — длина дуги кривой.
1031. $x = -\ln\cos t$, $y = \operatorname{tg} t - t$. **1032.** $x = \frac{1}{2}(t\sin t + \cos t)$, $y = -\frac{1}{2}(t\cos t - \sin t)$. **1033.** $x = \frac{1}{2}(t + \sin t)$, $y = -\frac{1}{2}\cos t$. **1034.** Логарифмическая спираль. **1036.** Эволюта данной циклоиды: $x = a(\varphi + \sin\varphi)$, $y = -a(1 - \cos\varphi)$. **1037.** а) $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = -\frac{c^2}{b}\sin^3 t$, где $c^2 = a^2 - b^2$; б) $x = -\frac{t^3}{p^2}$, $y = p + \frac{3}{2}\frac{t^2}{p}$ — полукубическая парабола; в) $x = a\cos^3\varphi + 3a\sin^2\varphi\cos\varphi$, $y = a\sin^3\varphi + 3a\cos^2\varphi\sin\varphi$ — астроида. **1039.** $0 < \varphi < \pi$, $-\infty < \psi < \infty$. Мы получаем регулярное параметрическое представление класса C^∞ сферы с выколотым полюсом. **1044.** Указание. Учесть, что $\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{i} + f_u\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{j} + f_v\boldsymbol{k}$, поэтому $|[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]| = \sqrt{(f_u)^2 + (f_v)^2 + 1} \neq 0$. Таким образом, $\varkappa$ является регулярным параметрическим представлением класса C^m. Далее показать, что $\varkappa$ является взаимно непрерывным отображением. Для этого учесть, что если $\boldsymbol{r}\{x, y, z\}$, то $x = u$, $y = v$. **1045.** Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **1048.** $\boldsymbol{p}(u)$ есть функция класса C^m, $v \neq 0$ и $\left[\boldsymbol{p}\frac{d\boldsymbol{p}}{du}\right] \neq 0$ для всех значений u. **1049.** Указание. Записать параметрическое представление плоскости Π и сферы c:

$$(\Pi)\ \boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \qquad (u, v) \in R^2,$$

$$(c)\ \boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} \pm \sqrt{1 - u^2 - v^2}\,\boldsymbol{k}, \qquad u^2 + v^2 < 1.$$

Далее воспользоваться задачей 1044 и учесть, что $\Pi = \Pi \cap TE_3$. **1050.** Указание. Записать уравнение гиперболического параболоида S в виде $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + \left(\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}\right)\boldsymbol{k}$ и, воспользовавшись задачей 1044, показать, что на S определяется локальная система координат. Далее учесть, что $S = S \cap TE_3$. **1051.** Указание. Записать канонические уравнения и воспользоваться теоремой 1, с. 115. **1052.** В качестве базиса можно взять следующие шесть локальных систем координат:

$$\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} \pm \sqrt{1 - u^2 - v^2}\,\boldsymbol{k}, \quad u^2 + v^2 < 1,$$

$$\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} \pm \sqrt{1 - u^2 - w^2}\,\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}, \quad u^2 + w^2 < 1,$$

$$\boldsymbol{r} = \pm\sqrt{1 - v^2 - w^2}\,\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}, \quad v^2 + w^2 < 1.$$

1053. Указание. В качестве базиса могут быть приняты следующие три локальные системы координат:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}(\varphi, \psi),\ 0 < \psi < 2\pi,\ 0 < \varphi < 2\pi;$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}(\varphi, \psi),\ -\pi < \psi < \pi,\ -\pi < \varphi < \pi;$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}(\varphi, \psi),\ -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}.$$

Здесь $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}(\varphi, \psi)$ — функция, заданная в задаче 1047.
1054. Указание. См. задачу 1048. **1055.** Поверхности б) и г) компактны, а а) и в) — не компактны. **1056.** $x + y + 3z - 9 = 0$, $x - 1 = y - 2 = \frac{z - 2}{3}$.

1057. $xa\sin v - ya\cos v + zu - auv = 0$, $\dfrac{x - u\cos v}{a\sin v} = \dfrac{y - u\sin v}{-a\cos v} = \dfrac{z - av}{u}$.

1058. $xy_0z_0 + yx_0z_0 + zx_0y_0 - 3a^3 = 0$,

$$\frac{x - x_0}{y_0z_0} = \frac{y - y_0}{x_0z_0} = \frac{z - z_0}{x_0y_0}.$$

1059. $x + y + z + 1 = 0$. **1060.** Указание. Все касательные плоскости проходят через начало координат. **1061.** Указание. Длина проекции отрезка нормали равна 1. **1062.** Указание. $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. **1063.** Указание. $v = \frac{9}{2}a^3$. **1064.** Указание. Сумма квадратов равна a^6. **1065.** 1) $x = y = z$, 2) $-x = y = z$, 3) $x = -y = z$, 4) $x = y = -z$. **1066.** Указание. $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$. **1068.** Три нормали в точках $M_1(0, 2, 2)$, $M_2(0, -2, 2)$, $M_3(0, 0, 3)$ поверхности. **1069.** Две плоскости $2\sqrt[3]{2}(x + y - 1) - 3z = 0$ и $z = 0$. **1072.** Указание. Сумма отрезков в произвольной точке равна a^2. **1073.** $u^* = \dfrac{1}{2uv}$, $v^* = -\dfrac{v}{2u}$, $uv \neq 0$. **1074.** Линии $u = u_0$ — прямолинейные образующие, линии $v = v_0$ — окружности. **1077.** Уравнения поверхности Γ: $x = 2t + 2ut\dfrac{1}{2t^2 + 1}$, $y = \ln t - 2t^2u\dfrac{1}{2t^2 + 1}$, $z = t^2 - u\dfrac{1}{2t^2 + 1}$, $0 < t < \infty$, $-\infty < u < \infty$. **1078.** Уравнения поверхности Γ: $x = e^t + 2u$, $y = e^{-t} - 2u$, $z = \sqrt{2}\,t - \sqrt{2}\,(e^t - e^{-t})\,u$, $(t, u) \in R^2$. **1079.** $x = a\cos t - u\dfrac{a\sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $y = a\sin t + u\dfrac{a\cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $z = bt + u\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $(t, u) \in R^2$; вектор нормали в произвольной точке: $(-abu\sin t,\ abu\cos t,\ -a^2u)$. **1083.** $ds^2 = dx^2 + dy^2$; б) $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$; в) $ds^2 = a^2d\varphi^2 + a^2\cos^2\varphi\, d\psi^2$; г) $ds^2 = a^2\operatorname{ctg}^2 u\, du^2 + a^2\sin^2 u\, dv^2$; д) $ds^2 = \{1 + f'^2(u)\}\, du^2 + 2af'(u)\, du\, dv + (a^2 + u^2)\, dv^2$; если $f(u) \equiv 0$, то $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2$; е) $ds^2 = \{1 + f'^2(r)\}\, dr^2 + r^2 d\varphi^2$; ж) $ds^2 = \dfrac{r^2}{r^2 - a^2}dr^2 + r^2d\varphi^2$. **1084.** $\frac{10}{3}a$. **1085.** $\frac{10}{3}a$. **1086.** Указание. Отображение устанавливается уравнениями $u = \sqrt{r^2 - a^2}$, $v = \varphi$. **1089.** Указание. Записать уравнение поверхности в виде $x = (\cos v - v\sin v) - u$, $y = (\sin v + v\cos v) + u$, $z = 2v + u$ и воспользоваться предыдущей задачей. **1090.** Указание. Пусть $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(s)$ — параметрическое представление данной кривой, где s — естественный параметр, а $\boldsymbol{n}(s)$ — орт главной нормали. Тогда поверхность, образованная главными нормалями, имеет параметрическое представление $\boldsymbol{r}(s, v) = \boldsymbol{\rho}(s) + v\boldsymbol{n}(s)$. Далее см. задачу 1088. **1091.** Указание. См. задачу 1090. **1092.** Указание. Во всех точках прямолинейной образующей развертывающейся поверхности касательная плоскость одна и та же. **1093.** б) $ds^2 = \{[1 - ak(u)\cos\varphi]^2 + [a\varkappa(u)]^2\}\, du^2 + 2a^2\varkappa(u) \times d u\, d\varphi + a^2\, d\varphi^2$. **1094.** а) $2\pi a\,|u_2 - u_1|$; б) $2\pi^2 a\sqrt{A^2 + B^2}$. **1095.** $\frac{\pi}{2}$. **1096.** $\cos\theta = \dfrac{1 - a^2}{1 + a^2}$. **1097.** $\theta = 0^0$. **1099.** $v = -\ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + \text{const}$. **1100.** $(1 + u^2)v^2 = c^2$. **1101.** $\cos\varphi_0 = \dfrac{u_0v_0}{\sqrt{1 + u_0^2}\sqrt{1 + v_0^2}}$. **1102.** $\sqrt{E}\, du \pm \sqrt{G}\, dv = 0$, где $E = (\boldsymbol{r}_u)^2$, $G = (\boldsymbol{r}_v)^2$ — коэффициенты первой квадратичной формы. **1104.** $\ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) \pm v = \text{const}$. **1105.** 1) В точках кривой $u - v = 0$ линии семейств (α) и (β) пересекаются ортогонально. 2) Кривая $u + v = 0$ — одна линия семейства (β). Она ортогональна линиям семейства (α). **1106.** $dv = \pm\sqrt{\dfrac{1 + u^2}{u}}\,du$. **1110.** $\cos\varphi = \dfrac{p + 4u^2}{\sqrt{p + 3u^3}\sqrt{p + q + 4u^2}}$, $\cos\varphi_0 = \dfrac{p + 64}{\sqrt{p + 48}\sqrt{p + q + 64}}$. **1116.** $u = \frac{\pi}{2}v$. **1117.** $v = \pm\operatorname{tg}\theta\ln(u +$

$+\sqrt{u^2-a^2})+\text{const}$. **1118.** $\sqrt{6}\ln u = v-2$, $\sqrt{6}\ln u = -v+2$. **1119.** $\varphi_2 = \dfrac{rdu^2+2sdudv+tdv^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, где $p=\dfrac{\partial z}{du}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial v}$, $r=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $s=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$, $t=\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

1120. $\varphi_2 = -a\operatorname{ctg} u du^2 + a\sin u\cos u \cdot dv^2$. **1121.** $\varphi^2 = \dfrac{f''(r)\,dr^2 + r^2 f'(r)\,d\varphi^2}{\sqrt{1+f'^2(r)}}$.

1122. $\varphi_2 = -\dfrac{a}{u^2+a^2}du^2+dv^2$. Указание. Воспользоваться уравнениями (5) на с. 116 и положить $r=\sqrt{u^2+a^2}$. **1123.** $\varphi_2=(b+a\sin\varphi)\,d\varphi^2+ad\psi^2$. **1124.** $\varphi_2 = -\dfrac{2adudv}{\sqrt{u^2+a^2}}$. **1125.** Указание. См. формулу Эйлера. **1128.** Для $u=\text{const}$, $k_n=-\dfrac{a}{u^2+a^2}$; для $v=\text{const}$, $k_n=\dfrac{a}{u^2+a^2}$. **1129.** $k_n=\dfrac{10}{111}$. **1130.** $k_1 = -\dfrac{a}{u^2+a^2}$, $k_2=\dfrac{a}{u^2+a^2}$. **1131.** $dv=\pm\dfrac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}$; $\dfrac{1}{R_1}=\dfrac{a}{u^2+a^2}$; $\dfrac{1}{R_2}=-\dfrac{a}{u^2+a^2}$. **1132.** $\dfrac{1}{R_1}=0$, $\dfrac{1}{R_2}=\dfrac{\varkappa}{|u|k}$, где k — кривизна, $\varkappa$ — кручение пространственной кривой. **1133.** Указание. См. задачу 1083, е). **1134.** Поверхностями главных центров кривизны поверхности вращения являются ось вращения и поверхность, полученная от вращения эволюты меридиана около той же оси. **1135.** $k_1=\dfrac{-uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}}{(1+u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$, $k_2=\dfrac{-uv-\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}}{(1+u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$. **1137.** $k=-\dfrac{a^2}{(u^2+a^2)^2}$, $H=0$. **1138.** а) $K=\dfrac{-4}{(1+4x^2+4y^2)^2}$, $H=\dfrac{4(y^2-x^2)}{(1+4x^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}}$;

б) $K=0$, $H=\dfrac{-c}{2\sqrt{a^2+c^2}\,av}$; в) $K=0$, $H=-\dfrac{\varkappa}{vk}$, где k, $\varkappa$ — кривизна и кручение данной кривой. **1139.** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=0$. **1140.** Решение. Если E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы, L, M, N — коэффициенты второй квадратичной формы, а K — полная и H — средняя кривизны поверхности, то

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2},\quad 2H=\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2}.$$

По условию имеем: $L=\lambda E$, $M=\lambda F$, $N=\lambda G$. Подставив эти выражения в предыдущие соотношения, после элементарных преобразований получаем: $H^2=K=\lambda^2$. **1141.** Катеноид (см. с. 116). Решение. Пусть поверхность вращения определяется уравнением $\psi(u)\,\boldsymbol{e}(v)+u\boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{e}(v)=\boldsymbol{i}\cos v+\boldsymbol{j}\sin v$, а параметрические уравнения кривой c, расположенной в плоскости XOZ: $x=\psi(u)>0$, $z=u$. В каждой точке поверхности средняя кривизна равна нулю. Следовательно, $1+\psi'^2-\psi\psi''=0$ или $\dfrac{\psi''\psi'}{1+\psi'^2}=\dfrac{\psi'}{\psi}$, т. е. $\dfrac{1}{2}\{\ln(1+\psi'^2)\}'=\{\ln\psi\}'$. После интегрирования получим: $\psi=a\sqrt{1+\psi'^2}$, где $a=\text{const}$. Переписывая уравнение в виде $\left\{\ln\left(\dfrac{\psi}{a}+\sqrt{\dfrac{\psi^2}{a^2}-1}\right)\right\}'=$

$= \frac{1}{a}$ и интегрируя его, получим $\ln\left(\frac{\psi}{a} + \sqrt{\frac{\psi^2}{a^2} - 1}\right) = \frac{u}{a}$, т. е. $\psi(u) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}\right)$. Это и есть уравнение цепной линии. Поверхность, полученная вращением цепной линии около оси z, есть катеноид (см. стр. 116). **1143.** Пусть тор задан параметрическими уравнениями, как в задаче 1123. Рассмотрим две параллельные касательные плоскости π_1 и π_2, перпендикулярные оси OZ, которые касаются поверхности по конгруэнтным окружностям L_1 и L_2. Эти окружности разделяют все точки тора, не лежащие на окружностях, на две части — внутреннюю G_1 и внешнюю G_2. Точки окружностей L_1 и L_2 параболические ($\varphi = 0$, $\varphi = \pi$). Точки области G_1 — гиперболические ($\pi < \varphi < 2\pi$), а точки области G_2 — эллиптические ($0 < \varphi < \pi$). Указание. Воспользовавшись ответом задачи 1123, показать, что $LN - M^2 = a(b + a \sin\varphi)\sin\varphi$. **1145.** $u = -\operatorname{tg}(v + c)$. **1146.** Две линии: а) $V = 0$, б) $U = -\frac{1}{2}$. **1147.** Указание. Данная поверхность вращения является псевдосферой (см. (6), стр. 116). Ее полная кривизна $K = -\frac{1}{a^2}$. **1148.** Указание. Воспользоваться формулами:

$$L = \frac{\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v}{|[\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v]|}, \qquad M = \frac{\mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v}{|[\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v]|},$$

$$N = \frac{\mathbf{r}_{vv}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v}{|[\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v]|}, \quad |[\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v]|^2 = EG - F^2.$$

1149. Указание. Воспользовавшись предыдущей задачей, а также теоремой об умножении определителей, сначала показать, что

$$K(EG - F^2)^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_{vv} & \mathbf{r}_u\mathbf{r}_{vv} & \mathbf{r}_v\mathbf{r}_{vv} \\ \mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_u\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v\mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_v & \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v & \mathbf{r}_v\mathbf{r}_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_{uv} & \mathbf{r}_u\mathbf{r}_{uv} & \mathbf{r}_v\mathbf{r}_{uv} \\ \mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_u\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v\mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_v & \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v & \mathbf{r}_v\mathbf{r}_v \end{vmatrix}.$$

Далее использовать формулы для определения E, F, G, а также выражения $F_u = (\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v)_u = \mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_v + \frac{1}{2}E_v$, $F_v = (\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v)_v = \frac{1}{2}G_u + \mathbf{r}_u\mathbf{r}_{vv}$,

$$\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_{vv} - \mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_{uv} = \left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right)_v - \frac{1}{2}G_{uu} = F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}.$$

1150. Указание. Теорема непосредственно следует из предыдущей задачи. **1151.** Два семейства асимптотических линий: 1) $u = \text{const}$ — винтовые линии, 2) $v = \text{const}$ — прямолинейные образующие. **1152.** $u = c_1$, $uv^2 = c_2$. **1153.** $y = \text{const}$ — первое семейство асимптотических линий — прямолинейные образующие, $x^2 y = \text{const}$ — второе семейство асимптотических линий. **1154.** $v = c$, $u = c_2 v$. **1156.** $-v + u = c$. $v = \int \frac{du}{3 + 2u^2}$. **1157.** $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ — асимптотические линии. **1158.** 1) $v = v_0$ — прямые, 2) $v = 2(u + c)$. **1160.** $v = \pm \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + \text{const}$. **1161.** $x + \sqrt{x^2 + 1} = c_1(y + \sqrt{y^2 + 1})$, $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = c_2$. **1162.** Асимптотические линии — прямолинейные образующие, линии кривизны: одно семейство — прямолинейно образующие, другое — семейство их ортогональных траекторий. **1163.** $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ — координатные линии на поверхности, которые являются соответственно прямыми и окружностями. **1164.** а) $u = u_1$ — прямолинейные образующие, б) $u + v = c$ — плоские кривые, лежащие в плоскости $z = c$. **1165.** $\ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) = \pm v + c$. **1168.** а) Винтовые линии цилиндрической поверхности, параллели и меридианы — геодезические линии. Указание. См. задачу 1167. б) Геодезические линии сферы — окружности больших кругов.

в) Геодезические линии геликоида определяются уравнениями:

$$v - v_0 = h\int\limits_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{(u^2+a^2)(u^2+a^2-h^2)}},$$

где u_0, v_0, h — некоторые постоянные. **1171.** $\pi + \frac{\sigma}{r^2}$. **1172.** $\pi - a^2\sigma$. **1174.** Да. **1176.** а), г), д), е). **1177.** Указание. Показать, что $TE_3 \setminus S$ открытое множество. **1178.** в) b, R и $\varnothing$; R — связное множество. **1182.** Любая полоса, определенная неравенством $0 \leqslant x \leqslant a$, где $0 \leqslant a \leqslant 1$, а также пустое множество. **1183.** Указание. Предварительно доказать следующее свойство: если A_α—произвольные множества из R, то $\underset{\alpha}{U}(R \setminus A_\alpha) = R \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$. **1184.** Указание. Воспользовавшись задачей 1181, рассмотреть шары с центрами в точках с рациональными координатами и рациональными радиусами. **1188.** Замыкание $\overline{N_1}$ — полоса $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, $\overline{N_2} = R$. Указание. Использовать задачу 1182. **1189.** Замыкание и граница куба — шар, описанный около куба. **1190.** а) Да; б) нет. Указание. Для доказательства достаточно рассмотреть два множества A и B. Множество A состоит из точек плоскости, для координат которых выполняются соотношения $x > y$. B состоит из таких точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x < y$; в) Нет. Указание. Достаточно рассмотреть два множества C и D. Первая координата точек множества C меньше $\sqrt{2}$, первая координата множества D больше $\sqrt{2}$. **1191.** а) Да; б) да; в) нет; г) нет; д) да. **1192.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. Указание. См. определение на с. 129. **1196.** Непрерывность нарушается на двух открытых лучах: $u = 0, v > 0$ и $u = 0$, $v < 0$. **1198.** Указание. а) См. задачу 1185; б) см. предложение а). **1200.** Указание. См. задачу 1199. **1201.** Нет. Указание. См. пример а) задачи 1195. **1203.** Нет, см. пример отображения f_4 задачи 1195. **1204.** Указание. См. задачу 1198 б). **1205.** Нет. Указание. Отображение $\varkappa^{-1}$ разрывно в точке (1, 0). **1207.** Указание. Учесть, что аффинное отображение задается формулами: $x' = a_1x + b_1y + c_1$, $y' = a_2x + b_2y + c_2$, где $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. **1208.** Указание. Достаточно показать, что отображение $\varkappa^{-1}: S' \to S$ непрерывно. **1211.** Указание. Если K — замкнутое множество, содержащееся в одном из данных множеств (полуинтервал, окружность и т. д.), то $K = E_2 \cap K'$, где K' — замкнутое множество TE_2. Далее см. задачу 1198 б). **1212.** Указание. а) Отрезок не гомеоморфен интервалу: отрезок — компактное множество, интервал и полуинтервал — нет. При доказательстве учесть, что у интервала существуют две предельные точки, не принадлежащие ему, а у полуинтервала только одна. б) Применить следующее утверждение: каждая точка квадрата имеет окрестность, граница которой связна; каждая точка отрезка имеет окрестность, граница которой не связна. **1213.** Применить теорему Эйлера. **1214.** Эйлеровы характеристики сферы, тора и кренделя соответственно равны 2,0 и — 2. **1215.** Эйлерова характеристика равна нулю. Указание. Доказать, что линии, на которых после склеивания лежат отрезки $[AB]$ и $[AD]$, задают клеточное разбиение бутылки Клейна. **1216.** Указание. Для построения клеточного разбиения проективной плоскости можно, например, взять три проективные прямые, не принадлежащие одному пучку.

УКАЗАТЕЛЬ ПРИМЕНЯЕМЫХ СИМВОЛОВ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

1. Символы, применяемые для обозначения различных пространств и систем аксиом

C — поле комплексных чисел.

R — поле действительных чисел.

R^2 — арифметическая плоскость ((x, y) — плоскость) (см. подстрочное примечание к задаче 1050) [1].

V — линейное векторное пространство (гл. IX, введение).

V_3 (V_2) — линейное трехмерное (двумерное) векторное пространство (гл. IX, введение).

E_3 (E_2) — трехмерное (двумерное) векторное евклидово пространство (гл. IX, введение).

$E_3^{\text{л}}$ ($E_2^{\text{л}}$) — псевдоевклидово векторное пространство трех (двух) измерений (задача 854).

TE_3 — трехмерное точечно-векторное евклидово пространство (гл. IX, введение).

P_3 — трехмерное проективное пространство (раздел I, введение).

P_2 — проективная плоскость (раздел I, введение).

P_2^* — проективная плоскость с фиксированной прямой p^* (гл. III, введение).

$\overline{P}_2^*$ — аффинная плоскость, т. е. множество точек $P_2^* \setminus p^*$ (гл. III, введение).

P_2^ω — проективная плоскость с фиксированной прямой p^ω, на которой задана эллиптическая инволюция ω (гл. IV, введение).

$\overline{P}_2^\omega$ — евклидова плоскость, т. е. множество точек $P_2^\omega \setminus p^\omega$ (гл. IV, введение).

A_3^∞ (A_2^∞) — трехмерное (двумерное) расширенное аффинное пространство (раздел I, введение).

E_3^∞ (E_2^∞) — трехмерное (двумерное) расширенное евклидово пространство (раздел I, введение).

$Э_2$ — эллиптическая плоскость (задача 852).

Г — система аксиом Гильберта для евклидовой геометрии.

Г* — система аксиом Гильберта для евклидовой плоскости Г1, Г2, ...— соответственно первая, вторая группы аксиом Гильберта.

Г5 — аксиома параллельности Евклида.

Л — аксиома параллельности Лобачевского.

2. Символы теории множеств

$a = b$ ($\Omega_1 = \Omega_2$) — следует читать: «элементы a и b (множества Ω_1 и Ω_2) совпадают».

$a \in \Omega$ — следует читать: «a является элементом множества Ω».

[1] Здесь и в дальнейшем в скобках даны ссылки на главы, параграфы, задачи, где даны пояснения соответствующих понятий и символов.

$\omega \subset \Omega$ — следует читать: «ω является подмножеством множества Ω».

$\Omega_1 \cap \Omega_2$ — пересечение множеств Ω_1 и Ω_2.

$\Omega_1 \cup \Omega_2$ — объединение множеств Ω_1 и Ω_2.

$\Omega \setminus \omega$ — множество всех элементов из Ω, которые не являются элементами множества ω.

$\{x \mid x \in \Omega,\ f(x) = m\}$ — множество всех x, удовлетворяющих условиям: $x \in \Omega$ и $f(x) = m$.

$\varnothing$ — пустое множество.

$\forall A$ — следует читать: «для произвольного A».

$\exists a : \Phi$ — следует читать: «существует такое a, что имеет место утверждение Φ».

$\exists! a : \Phi$ — следует читать: «существует одно и только одно a, такое, что имеет место утверждение Φ».

$\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2$ — следует читать: «из утверждения Φ_1 следует утверждение Φ_2».

$[a, b]$ — числовой сегмент, т. е. множество действительных чисел x, удовлетворяющих условию: $a \leqslant x \leqslant b$.

$f : \Omega_1 \to \Omega_2$ — отображение элементов множества Ω_1 в элементы множества Ω_2.

3. Символы, применяемые в векторной алгебре

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots\ \overline{AB}, \overline{CD}$ — векторы (гл. IX, введение).

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ — сумма векторов (гл. IX, введение).

$\alpha\boldsymbol{a}$ — произведение вектора на число (гл. IX, введение).

$\boldsymbol{ab}/\boldsymbol{u}$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, установленное вектором $\boldsymbol{u}$ (гл. IX, введение).

$\boldsymbol{ab}$ — скалярное произведение векторов (гл. IX, введение).

$|\boldsymbol{a}|$ ($|\overline{AB}|$) — модуль вектора (см. задачу 865).

$L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq \boldsymbol{0}$ — следует читать: «векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно независимы».

$(x, y) \neq (0, 0)$ или $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ — следует читать: числа x, y (или числа x, y, z) одновременно не равны нулю.

4. Символы и обозначения, применяемые в геометрии

а) Общие символы и обозначения

A, B, C — точки.

a, b, c — прямые, как самостоятельные объекты.

$(a), (b), (c)$ — прямые, как множества точек.

Π, Π_1, Π_2 — плоскости.

$(A, \boldsymbol{p})$ — прямая, содержащая точку A и вектор $\boldsymbol{p}$.

$(A, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ — плоскость, содержащая точку A и векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$.

(AB) — прямая, проходящая через точки A и B.

$A\ L\ B$ — соединение точек, т. е. прямая AB, если $A \neq B$, и точка A, если $A = B$.

$[O]$ — пучок прямых с центром в точке O.

$[AB]$ — отрезок с концами A и B.

$[OA)$ — закрытый луч, исходящий из точки O и содержащий точку A.

$AB \div CD$ — следует читать: «пара AB разделяет пару CD».

$AB \mathbin{\underline{\cdot\cdot}} CD$ — следует читать: «пара AB не разделяет пару CD».

$AB \overset{h}{\underline{\cdot}} MN$ — следует читать: «пара точек A, B гармонически разделяет пару M, N».

$\varkappa$ — соотношение инцидентности между ненулевыми векторами и точками (гл. IX, введение).

$[AB] \cong [CD]$ — следует читать: «отрезок AB конгруэнтен отрезку CD».

$a \parallel b$ — следует читать: «прямые a и b параллельны, т. е. совпадают или лежат в одной плоскости и не имеют общих точек».

$\pi : (l) \to (l')$ — проективное отображение точек прямой l на точки прямой l'.

$\sigma : (l) \overset{O}{\to} (l')$ — перспективное отображение прямых с центром в точке O.

$\overline{\pi} : [O] \to [O']$ — проективное отображение пучка $[O]$ на пучок $[O']$.

$\pi : P_2 \to P_2$ — проективное преобразование плоскости.

(ABC) — простое отношение точек A, B и C (задача 254).

$(ABCD)$ — сложное отношение четырех точек.

$|AB|$ — расстояние между точками A и B.
$\overline{p}^*$ — абсолют плоскости P_2^* или несобственная прямая плоскости $\overline{P}_2^*$.
p^{ω} — абсолют плоскости P_2^{ω}.

б) Символы, применяемые в задачах на построение

(O, r) — окружность с центром в точке O и радиуса r.
$a, b, \ldots$ — отрезки.
$[AB]$, $[CD]$ — отрезки, определяемые концами A, B и C, D.
φ, ψ — углы.
Для элементов треугольника ABC приняты обозначения:
$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — углы треугольника.
a, b, c — стороны, противолежащие соответственно $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$.
h_a — высота, проведенная из вершины A.
m_a — медиана, проведенная из вершины A.
b_A — биссектриса угла A.
$2p$ — периметр треугольника.

$S\,(O, r_0)$ — сферическая поверхность с центром в точке O и радиусом r_0.
$Ц\,(l_0, r_0)$ — цилиндрическая поверхность с осью l_0 и радиусом r_0.
$K\,(O, l_0, \varphi_0)$ — коническая поверхность с вершиной O, осью l_0 и углом φ_0.

в) Символы, применяемые в дифференциальной геометрии

s — естественная параметризация кривой.

$\dot{\boldsymbol{r}}$ — производная по естественному параметру: $\dot{\boldsymbol{r}} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$.

$\boldsymbol{r}'$ — производная по произвольному параметру: $\boldsymbol{r}' = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$.

k — кривизна кривой.
$\varkappa$ — кручение кривой.
$\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторы сопровождающего трехгранника.
$f_x, f_y, f_z, f_{xx} \ldots$ — частные производные функции $f\,(x, y, z)$:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_z = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ \ldots$$

$\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ — частные производные функции $\boldsymbol{r}\,(u, v)$:

$$\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \quad \boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v},$$

k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности.
k — полная кривизна поверхности.

$\dfrac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}$ — якобиан функций $x = x\,(u, v)$, $y = y\,(u, v)$, т. е. определитель $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Ч. 1 и 2. М., Учпедгиз, 1948.
2. Адлер А. Теория геометрических построений. М., Учпедгиз, 1940.
3. Александров И. И. Сборник геометрических задач на построение. М., Учпедгиз, 1950.
4. Аргунов Б. И. и Балк М. Б. Геометрические построения на плоскости. М., Учпедгиз, 1955.
5. Атанасян Л. С. Геометрия. Ч. I. М., «Просвещение», 1973.
6. Атанасян Л. С. и Гуревич Г. Б. Геометрия. Ч. II. М., «Просвещение» (готовится к печати).
7. Атанасян Л. С. и др. Сборник задач по элементарной геометрии. М., «Просвещение», 1964.
8. Атанасян Л. С. и Атанасян В. А. Сборник задач по геометрии. Ч. I. М., «Просвещение», 1973.
9. Атанасян Л. С. Основания геометрии. М., Учпедгиз, 1960.
10. Атанасян Л. С. Контрольные работы по дифференциальной геометрии (пособие для заочников). М., Учпедгиз, 1953.
11. Бакельман И. Я. Высшая геометрия. М., «Просвещение», 1967.
12. Барыбин К. С. Сборник геометрических задач на доказательство. М., Учпедгиз, 1952.
13. Барыбин К. С. и Исаков А. К. Сборник задач по математике. М., Учпедгиз, 1952.
14. Буземан Г. и Келли П. Проективная геометрия и проективные метрики. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
15. Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
16. Вольберг О. А. Основные идеи проективной геометрии. М.— Л., ОНТИ, 1935.
17. Гильберт Д. Основания геометрии. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
18. Гиршвальд Л. Я. Проективная геометрия. Харьков, 1935.
19. Глаголев Н. А. Элементарная геометрия. Ч. 1 и 2. М., Учпедгиз, 1945.
20. Глаголев Н. А. Проективная геометрия. Изд. 2-е. М., «Высшая школа», 1963.
21. Глаголев Н. А. Начертательная геометрия. Изд. 3-е. М., ГТТИ, 1953.
22. Гуревич Г. Б. Проективная геометрия. М., Физматгиз, 1960.
23. Делоне Б. Н. и Житомирский О. К. Задачник по геометрии. Л., Гостехиздат, 1949.
24. Делоне Б. Н., Житомирский О. К. и Фетисов А. И. Сборник геометрических задач. М., Учпедгиз, 1951.
25. Дзык П. Г. Сборник стереометрических задач на комбинации тел. М., Учпедгиз, 1936.
26. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М., Физматгиз, 1961.
27. Житомирский О. К. Проективная геометрия в задачах. М., Гостехиздат, 1954.

28. Житомирский О. К., Львовский В. Д., Милинский В. И. Задачи по высшей геометрии. Ч. I. Л.— М., ОНТИ, 1935. Ч. II. Л., ОНТИ, 1937.
29. Зетель С. И. Геометрия линейки и геометрия циркуля. М., Изд-во АПН РСФСР, 1950.
30. Коксте р С. М. Действительная проективная плоскость, М., Физматгиз, 1959.
31. Комиссарук А. М. Проективная геометрия в задачах. Минск, «Высшая школа», 1971.
32. Кутузов Б. В. Геометрия. М., Учпедгиз, 1955.
33. Лоповок Л. М. Сборник стереометрических задач на построение. М., Учпедгиз, 1953.
34. Моденов П. С. Сборник задач по дифференциальной геометрии. М., Учпедгиз, 1949.
35. Моденов П. С. Сборник задач по математике с анализом решений. М., «Советская наука», 1959.
36. Наумович Н. В. Геометрические места в пространстве и задачи на построение. М., Учпедгиз, 1956.
37. Норден А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии. М., Физматгиз, 1958.
38. Перепелкин Д. И. Курс элементарной геометрии. Т. 1 и 2. М., ГТТИ, 1948.
39. Перепелкин Д. И. Геометрические построения в средней школе. М., Учпедгиз, 1953.
40. Романовский Б. В. Задачи на построение в стереометрии. М., Учпедгиз, 1936.
41. Розендорн Э. Р. Задачи по дифференциальной геометрии. М., «Наука», 1971.
42. Рыбкин Н. Сборник задач по геометрии. Ч. II (стереометрия). Изд. 24-е. М., Учпедгиз, 1957.
43. Скопец З. А. и Жаров В. А. Задачи и теоремы по геометрии. Планиметрия. М., Учпедгиз, 1962.
44. Скорняков Л. А. Проективные плоскости.— «Успехи математических наук», 1951, вып. 6 (46).
45. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М., ГИТТЛ, 1956.
46. Фиников С. П. Курс дифференциальной геометрии. М., ГИТТЛ, 1952.
47. Фиников С. П. Дифференциальная геометрия. М., Учпедгиз, 1949.
48. Фиников С. П. Дифференциальная геометрия. М., Учпедгиз, 1955.
49. Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. М., «Мир», 1970.
50. Холл М. Теория групп, гл. 20. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
51. Цахариас М. Введение в проективную геометрию. М.— Л., ГТТИ, 1932.
52. Четверухин Н. Ф. Проективная геометрия. М., «Просвещение», 1969.
53. Четверухин Н. Ф. Изображение фигур в курсе геометрии. Изд. 2-е. М., Учпедгиз, 1958.
54. Четверухин Н. Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже. Изд. 2-е. М., Учпедгиз, 1952.
55. Четверухин Н. Ф. Методы геометрических построений. М., Учпедгиз, 1938.
56. Шахно К. Х. Сборник конкурсных задач по математике. Л., Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1951.
57. Юнг Дж. В. Проективная геометрия. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
58. Яглом И. М. Геометрические преобразования. Ч. I. М., Гостехиздат, 1955.
59. Яглом И. М. и Ашкинузе В. Г. Идеи и методы аффинной и проективной геометрии. М., Учпедгиз, 1962.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел второй

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ. МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Раздел третий

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

часть II

Редактор *А. М. Абрамов*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *М. И. Смирнова*
Корректоры *К. А. Иванова* и *В. И. Громова*

Сдано в набор 9/VI 1975 г. Подписано к печати 13/XI 1975 г. 60×90$^{1}/_{16}$. Бумага тип. № 2. Печ. л. 11. Уч.-изд. л. 12,48. Тираж 87 тыс. экз. А 08661.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Головное предприятие республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, Киев, ул. Довженко, 3.
Заказ № 5—1053.

Цена без переплета 35 к., переплет 10 к.,